छत्तीसगढ़ राज्य ओपन स्कूल परीक्षा

सॉल्व्ड पेपर—दिसम्बर, 2012

कक्षा 12वीं

विषय : गणित

सेट—1

समय : 3 घण्टे] **[पूर्णांक : 100**

निर्देश—(i) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है। (ii) प्रश्न क्रमांक 1 से 22 तक पर 1 अंक निर्धारित है। (iii) प्रश्न क्रमांक 23 से 38 तक पर 4 अंक निर्धारित हैं। (iv) प्रश्न क्रमांक 32 से 38 तक पर 6 अंक निर्धारित हैं।

1. $\frac{1-i}{1+i}$ **का संयुग्मी संख्या है—**

(a) i (b) $-i$ (c) $\frac{1}{i}$ (d) $\frac{-1}{i}$.

उत्तर—(a) i.

2. $^9C_5$ **का मान है—**

(a) 126 (b) 45 (c) $\frac{1}{126}$ (d) $\frac{9}{20}$.

उत्तर—(a) 126.

3. समान्तर श्रेणी $\sqrt{2}+1, \sqrt{2}, \sqrt{2}-1$ ...... का 10 वाँ पद है—

(a) $\sqrt{2}-9$ (b) $8\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}-8$ (d) $\sqrt{2}+8$.

उत्तर—(c) $\sqrt{2}-8$.

4. $\frac{a^4}{b^4}$ **और** $\frac{b^4}{a^4}$ **का गुणोत्तर माध्य है—**

(a) 1, (b) $\frac{a^4}{b^4}$ (c) $\frac{a^8+b^8}{2a^4b^4}$ (d) $\frac{a^4+b^4}{a^4b^4}$.

उत्तर—(a) 1

5. सारणिक $\begin{vmatrix} \sin 40^\circ & \cos 40^\circ \\ \sin 10^\circ & \cos 10^\circ \end{vmatrix}$ **का मान है—**

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$.

उत्तर—(d) $\frac{1}{2}$.

6. यदि A = [1, 2, 3] तथा B = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ हो तो (AB)′ बराबर है—

(a) BA′ (b) B′A′ (c) AB (d) B′A.

उत्तर—(b) B′A′.

7. असंयुक्त समुच्चय किसे कहते हैं ?

उत्तर—दो ऐसे समुच्चय जिनमें कोई भी अवयव उभयनिष्ठ न हो उसे असंयुक्त समुच्चय कहते हैं।

उदाहरण— A = {2, 4, 6, 8, 10}
B = {1, 3, 5, 7, 9}

इसमें A के कोई भी अवयव समुच्चय B का अवयव नहीं है और न ही समुच्चय B का एक भी अवयव समुच्चय A का अवयव है।

8. A = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*} और B = {*b*, *d*, *f*, *g*} का अन्तर A–B का मान है—

(a) {*a*, *b*, *c*, *e*} (b) {*b*, *d*}
(c) {*f*, *g*} (d) {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*}

उत्तर—(a) {*a*, *c*, *e*}

9. $\frac{\pi}{3}$ रेडियन का मान अंशों में है—

(a) 105° (b) 90° (c) 45° (d) 60°.

उत्तर—(d) 60°.

10. यदि $\frac{\pi}{6}$ = A हो, तो tan 2A का मान है—

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{3}$.

उत्तर—(c) $\sqrt{3}$.

11. cot (A + B) का योग तथा गुणज है—

(a) $\frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B + \cot A}$ (b) $\frac{1 - \cot A \cot B}{\cot A + \cot B}$

(c) $\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$ (d) $\frac{\cot B + \cot A}{\cot A \cot B - 1}$.

उत्तर—(c) $\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$.

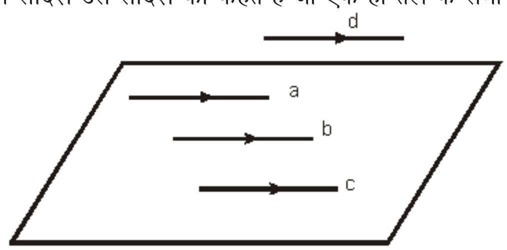
12. एक त्रिभुज ABC में $a = 2c$ और $b = 3c$ है तो cos B का मान है—

(a) 1 (b) – 1 (c) $\frac{5}{4}$ (d) $\frac{4}{5}$

उत्तर—(b) – 1.

13. समतली सदिश किसे कहते हैं ?

उत्तर—समतली सदिश उस सदिश को कहते हैं जो एक ही तल के समान्तर होते हैं।



14. गोला $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 12y + 6z + 2 = 0$ का केन्द्र है—

(a) (2, 4, – 2) (b) (1, 2, – 1) (c) (1, 2, 1) (d) (– 2, – 4, 2).

उत्तर—(b) (1, 2, – 1)

15. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ **का मान है—**

(a) 3 (b) 0 (c) ∞ (d) 4.

उत्तर—(a) 3.

16. sin 3*x* का अवकल गुणांक है—

(a) $3 \cos 3x$ (b) $\cos 3x$ (c) $\frac{\cos 3x}{3}$ (d) $-3 \cos 3x$.

उत्तर—(d) $-3 \cos 3x$.

17. $\int x^7\, dx$ **का समाकलन है—**

(a) $\frac{8}{x^8}$ (b) $\frac{8}{x^8} + C$ (c) $\frac{x^8}{8}$ (d) $\frac{x^8}{8} + C$.

उत्तर—(c) $\frac{x^8}{8}$.

18. प्रथम सात विषम प्राकृतिक संख्याओं की मध्यिका होगी—

(a) 7 (b) 4 (c) 6 (d) 10.

उत्तर—(a) 7.

19. राम की दौड़ में जीतने की प्रायिकता 0·3 है, तब दौड़ में हारने की प्रायिकता है—

(a) 1·3 (b) $\frac{0\cdot3}{0\cdot7}$ (c) 0·7 (d) $\frac{0\cdot7}{0\cdot3}$.

उत्तर—(c) 0·7.

20. वक्र $x^2 = y$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है—

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) – 2.

उत्तर—(a) 2.

21. $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ **का मान होगा—**

(a) 0 (b) 1 (c) – 1 (d) 2.

उत्तर—(b) 1.

22. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sin x$ **की कोटि है—**

(a) 1 (b) – 1 (c) 2 (d) 0.

उत्तर—(a) 1.

प्रश्न 23. यदि $1 + \omega + \omega^2 = 0$ हो तो "द्ध कीजिए कि $(1 - \omega + \omega^2)^3 = -8$.

हल :

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= (1 - \omega + \omega^2)^3 \\ &= (1 - \omega - \omega)^3 \quad (\because \omega^2 = -\omega) \\ &= (-\omega - \omega)^3 \\ &= (-2\omega)^3 \\ &= -8\omega^3 \\ &= -8 \\ &= \text{R. H. S.} \end{aligned}$$

अथवा

प्रश्न—14 क्रिकेट खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों का चुनाव कितने प्रकार से किया जा सकता है ? जबकि 2 गेंदबाज अवश्य शामिल रहें।

हल : जब 2 तेज गेंदबाजों को अवश्य शामिल करना है तब (11 – 2) अर्थात् 9 खिलाड़ियों का ही चुनाव करना है। अत: अभीष्ट संचयों की संख्या

$$\begin{aligned} &= {}^{12}C_9 \\ &= {}^{12}C_3 \\ &= \frac{12 \times 11 \times 10}{1.\ 2.\ 3} \\ &= 22.0 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 24. दो संख्याओं का समान्तर माध्य 6 और उनके वर्गों का योग 90 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना वे संख्याएँ a और b हैं।

प्रश्नानुसार,

$$\frac{a + b}{2} = 6$$

$$a + b = 12$$

$$a = 12 - 6 \quad ...(1)$$

वर्गों का योगफल = 90

$$a^2 + b^2 = 90 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) में a का मान रखने पर

$$(12 - b)^2 + b^2 = 90$$
$$\Rightarrow \quad 144 + b^2 - 24b + b^2 = 90$$
$$\Rightarrow \quad 2b^2 - 24b + 144 = 90$$
$$\Rightarrow \quad 2b^2 - 24b + 144 - 90 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2b^2 - 24b + 54 = 0$$
$$\Rightarrow \quad b^2 - 12b + 27 = 0$$
$$\Rightarrow \quad b^2 - 3b - 9b + 27 = 0$$
$$\Rightarrow \quad b\,(b - 3) - 9\,(b - 3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (b - 3)\,(b - 9) = 0$$

$b - 3 = 0$ या $b - 9 = 0$

$b = 3$ या $b = 9$

समीकरण (1) में b का मान रखने पर

$a = 12 - 3$ व $a = 12 - 9$

$a = 9$ व $a = 3$

अत: वे संख्याएँ 3 व 9 होंगी। **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) + \ldots\ldots\ldots + n$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : श्रेणी का nवाँ पद $= 1 + 2 + 3 + 4$

$$= \Sigma n$$
$$= \frac{n\,(n + 1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\,(n^2 + n)$$

अत: अभीष्ट योगफल $= \Sigma \frac{1}{2}\,(n^2 + n)$

$$= \frac{1}{2}\,[\Sigma n^2 + \Sigma n]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n\,(n + 1)\,(2n + 1)}{6} + \frac{n\,(n - 1)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{n\,(n + 1)}{6}\,[2n + 1 + 3]$$
$$= \frac{2n\,(n + 1)\,(n + 2)}{12}$$
$$= \frac{n\,(n + 1)\,(n + 2)}{6}$$

उत्तर

प्रश्न 25. $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$ **को हल कीजिए।**

हल : $\cos\frac{ð}{3}\cos\frac{ð}{4}+\sin\frac{ð}{3}\sin\frac{ð}{4}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—फलन $y = 3x^2 + 2$ के प्रान्त ज्ञात कीजिए, जबकि $x\Sigma R$.

हल : $y = 3x^2 + 2$

$x = 1$ हो तब $y = 3(1)^2 + 2$
$y = 5$

$x = 2$ हो तब $y = 3(2)^2 + 2$
$y = 14$

$x = 3$ हो तब $y = 3(3)^2 + 2$
$y = 83$

$x = 0$ हो तब $y = 3(0)^2 + 2$
$y = 2$

$x = -1$ हो तब $y = 3(-1)^2 + 2$
$y = 5$

$x = -2$ हो तब $y = 3(-2)^2 + 2$
$y = 14$

क्रमित युग्मों का समुच्चय = {........, (–2, 14), (– 1, 5), (0, 2), (3, 83), (2, 14), (1, 14),.......}.

x के सभी वास्तविक मान सम्भव हैं क्योंकि $x \varepsilon R$

प्रान्त = R.

प्रश्न 26. $\sin 8\theta + \sin 3\theta$ **को गुणन के रूप में व्यक्त कीजिए।**

हल : $\sin 8\theta + \sin 3\theta$

$$= 2\sin\frac{8\theta+3\theta}{2}\cos\frac{8\theta-3\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{11\theta}{2}\cdot\cos\frac{5\theta}{2}$$

यह गुणन का एक रूप है।

अथवा

प्रश्न—यदि ΔABC में $a = 2$, b = 7 और $c = 5$ हो तो कोण B का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है—

$$a = 2,$$
$$b = 7,$$
$$c = 5.$$

ज्ञात करना है— $\angle B = ?$

कोसाइन सूत्र—

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$= \frac{(5)^2 + (2)^2 - (7)^2}{2 \times 5 \times 2}$$

$$= \frac{25 + 4 - 49}{20}$$

$$= \frac{29 - 49}{20}$$

$$= \frac{-20}{20}$$

$$= -1$$

$$\cos B = \text{Cos } 180^\circ$$

$$B = 180^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ$$ **उत्तर**

प्रश्न 27. बिन्दु (1, 3) और बिन्दु (2, – 5) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल :

सूत्र : अभीष्ट दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

यहाँ $x_1 = 1, \quad y_1 = 3,$

$x_2 = 2, \quad y_2 = 5.$

अत: $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-5-3)^2}$

$$AB = \sqrt{(1)^2 + (-8)^2}$$

$$AB = \sqrt{1 + 64}$$

$$AB = \sqrt{65}$$ **उत्तर**

प्रश्न—एक सरल रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए जो रेखा $x \cos\theta + y \sin\theta = P$ के समान्तर है।

हल : दी हुई रेखा के समीकरण है :

$x \cos\theta + y \sin\theta = P$

इसे $y = mx + c$ के रूप में लिखने पर

$$y \sin\theta = P - x\cos\theta$$

$\Rightarrow$ $$y = \frac{P}{\sin\theta} - x\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\Rightarrow$ $$y = \frac{P}{\sin\theta} - x\cot\theta$$

$\therefore$ प्रवणता $= -\cot\theta$

$\because$ समान्तर रेखाओं की प्रवणताएँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ रेखा (1) की समान्तर रेखा की प्रवणता $-\cot\theta$ है। **उत्तर**

प्रश्न 28. सदिशों $i + 2j + k$ तथा $-2i + 5j - 2k$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल : माना $i + 2j + k = \vec{a}$ तथा $-2i + 5j - 2k = \vec{b}$

$\therefore$ $$a = |\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

तथा $$b = |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$$

माना $\vec{a}$ तथा कोण के मध्य θ है तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{ab} = \frac{(i + 2j + k) - (-2i + 5j - 2k)}{\sqrt{6}\times\sqrt{33}} = \frac{-2 + 10 - 2}{\sqrt{198}}$$

$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{198}}$$

$\therefore$ $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{198}}\right)$$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न– गोले का समीकरण $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 6z - 19 = 0$ से उसका केन्द्र ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का दिया गया समीकरण है :

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 6z - 19 = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3z - \frac{19}{2} = 0$

$\Rightarrow \quad g = -1,$

$f = 2,$

$h = -\frac{3}{2},$

$c = -\frac{19}{2}$

केन्द्र $= (-g, -f, -h)$

केन्द्र $= \left(1, -2, \frac{3}{2}\right)$ उत्तर

प्रश्न 29. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ **को सरल कीजिए।**

हल : $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - (2)^3}{x^2 - (2)^2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+2)}$

limit लेने पर $= \frac{4+4+4}{2+2} = \frac{12}{4}$

$= 3$ उत्तर

अथवा

प्रश्न– log (log x) का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = \log(\log x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log(\log x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x} \times \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x}$ उत्तर

प्रश्न 30. निम्नलिखित सारणी से लघु विधि द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	8	12	10	11	9

हल :

वर्ग अन्तराल	मध्यमान x	कल्पित माध्य से विचलन $d = x - a$	बारम्बारता f	गुणनफल $f.d$
0–10	5	– 20	8	– 160
10 – 20	15	– 10	12	– 120
20 – 30	25 = a	0	10	0
30 – 40	35	+ 10	11	+ 110
40 – 50	45	+ 20	9	+ 180
कुल योग			$\Sigma f = 50$	$\Sigma fd = 10$

यहाँ $a = 25$

$\Sigma f = 50$

$\Sigma fd = 10$

समान्तर माध्य $\bar{x} = a + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$$\bar{x} = 25 + \frac{10}{50}$$

$$\bar{x} = 25 + \frac{1}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{125 + 1}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{126}{5}$$

$$\bar{x} = 25.2$$

अथवा

प्रश्न—अच्छी तरह से फेंटी हुई ताश की गड्डी से एक साथ दो पत्ते निकाले जाते हैं। दोनों इक्के हों, उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : 52 पत्तों में से 2 पत्ते निकालने के कुल तरीके

$$= {}^{52}C_2$$

4 इक्के में से 2 इक्के निकालने के कुल तरीके

$$= {}^{4}C_2$$

अत: अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{^4C_2}{^{52}C_2}$

$= \frac{\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\frac{52 \cdot 51}{2 \cdot 1}}$

$= \frac{4 \times 3}{52 \times 51}$

$= \frac{1}{221}$ **उत्तर**

प्रश्न 31. निम्न सारणी से मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	**2**	**10**	**8**	**4**	**6**

हल :

वर्ग अन्तराल	मध्य मूल्य (x)	आवृत्ति (f)	$f \times x$	$d = x - m$	d^2	fd^2
0–10	5	2	10	– 20·7	428·49	856·98
10–20	15	10	150	–10·7	144·49	114·90
20–30	25	8	200	–0·7	0·49	3·96
30–40	35	4	140	9·3	88·49	345·96
40–50	45	6	270	19·3	372·49	2234·94
		$\Sigma f = 30$	$\Sigma fx = 770$			$\Sigma fd^2 =$ 4586·74

समान्तर माध्य = $\frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{770}{30} = 25 \cdot 66 = 25 \cdot 7$ (लगभग)

मानक विचलन (σ) = $\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{4586 \cdot 74}{30}}$

$= \sqrt{152 \cdot 89} = 12 \cdot 36$

मानक विचलन गुणांक = $\frac{ó}{M} = \frac{12 \cdot 365}{25 \cdot 7} = 0 \cdot 481$

प्रसरण गुणांक = $0 \cdot 482 \times 100 = 48 \cdot 1$

प्रसरण $\sigma^2 = (12 \cdot 36)^2 = 152 \cdot 89$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—निम्न सारणी से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	0–8	8–16	16–24	24–32	32–40	40–48
आवृत्ति	8	20	24	32	9	7

हल :

क्र. अन्तराल	वर्ग बिन्दु	मध्यमान	f	$x - M$	$\|x - M\|$	$f\|x - M\|$
1	0–8	4	8	– 24	24	192
2	8–16	12	20	– 16	16	320
3	16–24	20	24	– 8	8	192
4	24–32	28	32	0	0	0
5	32–40	36	9	+ 8	8	72
6	40–48	44	7	+ 16	16	112
			$\Sigma f = 100$		$= 888$	$\Sigma f\|x - M\|$

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\sum f\,|x - M|}{N}$$

$$= \frac{888}{100}$$

$$= 8{\cdot}88$$ **उत्तर**

प्रश्न 32. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों $m : n$ का अनुपात हो, तो "द्ध कीजिए कि $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{b^2}{ac}}$.

हल : मान लीजिए कि समीकरण

$ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हैं

तब $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad ...(1)$$

तथा $$\alpha\beta = \frac{c}{a} \quad ...(2)$$

प्रश्नानुसार, $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n} \quad ...(3)$$

अब $$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\frac{-b}{a}}{\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

$$= \frac{-b}{a} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \times \frac{a}{c}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{ac}}$$

उत्तर

अथवा

प्रश्न—गणितीय आगमन “द्धान्त से “द्ध करो कि

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n}{2}(n + 1)$, जहाँ n प्राकृत संख्या है।

हल : $n = 1$ के लिए कथन का वाम पक्ष = 1

और दायाँ पक्ष = $\frac{1\,(1 + 1)}{2} = 1$

अतः $n = 1$ के लिए दिया हुआ कथन सत्य है।

मान लीजिए कि दिया हुआ कथन $n = m$ के लिए सत्य है।

तब $1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m\,(m + 1)}{2}$ सत्य है।

अब दोनों पक्षों में $(m + 1)$ जोड़ने पर,

$$1 + 2 + 3 + ... + m + (m + 1) = \frac{m\,(m + 1)}{2} + (m + 1)$$

$$= \left(\frac{m}{2} + 1\right)(m + 1)$$

$$= \left(\frac{m + 2}{2}\right)(m + 1)$$

$$= \frac{(m + 1)\,[(m + 1) + 1]}{2}$$

$\therefore$ दिया हुआ कथन $n = (m + 1)$ के लिए भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन “द्धान्त से दिया हुआ कथन n के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए सत्य है। **“द्ध हुआ।**

प्रश्न 33. “द्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} = (a + b + c)^3$$

हल : माना कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_1 \rightarrow R_1 + (R_2 + R_3)$ से

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

संक्रियाओं $C_2 \rightarrow (C_2 - C_1)$ एवं $C_3 \rightarrow (C_3 - C_1)$ से

$$\Delta = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (a+b+c)\,(a+b+c)^2$$

$$\Delta = (a+b+c)^3$$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न–यदि $A = [1, 2, 3]$ और $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ हो तो AB और BA को ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है–

$$A = [1, 2, 3],\ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ तो}$$

$$A.B = [1, 2, 3] . \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6]$$

$$= [4 + 10 + 18]$$

$$= [32]$$

तथा $$B.A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} [1\ 2\ 3]$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix}$$

अत: $AB = [32]$ और $BA = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix}$ **उत्तर**

प्रश्न 34. कोसाइन सूत्र की उत्पत्ति लिखिए।

उत्तर—कोसाइन सूत्र—

(1) $\cos A = \dfrac{a^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(2) $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

(3) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

उत्पत्ति—ΔABC में $BC = a$, $CA = b$ और $AB = c$ हो

यदि $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ को “द्ध करना है।

जब कोण C समकोण हो तब

$AB^2 = c^2 = b^2 + a^2$ $\because \cos \dfrac{ð}{2}$

$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \text{ Cos } C$

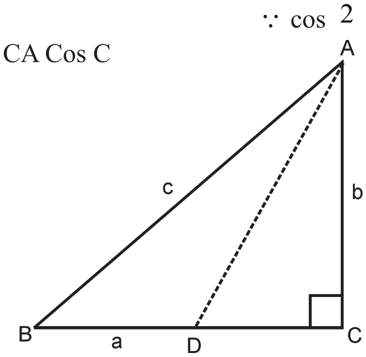
$\because$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$\cos C = a^2 + b^2 - c^2$

या $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

अत: $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

इसी प्रकार, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$



और $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ को “द्ध किया जा सकता है। यही कोसाइन सूत्र है।

अथवा

प्रश्न—“द्ध कीजिए कि

$$\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$$

हल : L.H.S. $= \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

या $= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{\frac{4}{5}}\right] + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

या $= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-\frac{16}{25}}}{\frac{4}{5}}\right] + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

या $= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{9}{25}}}{\frac{4}{5}}\right] + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

या $= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}\right] + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

या $= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{27}{20}}{1-\frac{9}{20}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{27}{20}}{\frac{11}{20}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{27}{11}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

= R.H.S. **यही "द्ध करना है।**

प्रश्न 35. यदि रेखाएँ $7x - 5y = 12$ और $5x + Py = 4$ एक दूसरे के लम्बवत् हो तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई रेखाएँ निम्न हैं–

$$7x - 5y = 12 \quad ...(1)$$
$$5x + Py = 4 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) से, $7x - 5y = 12$

$\Rightarrow \quad 5y = 7x - 12$

$\Rightarrow \quad y = \frac{7}{5}x - \frac{12}{5}$

$\therefore$ रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = \frac{7}{5}$

पुन: समीकरण (2) से, $Py = -5x + 4$

$y = -\frac{5}{P}x + \frac{4}{P}$

$\therefore$ रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\frac{5}{P}$

अब यदि रेखाएँ (1) और (2) लम्बवत् हों तो

$m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow \quad \frac{7}{5} \times \left(\frac{-5}{P}\right) = -1$

$\Rightarrow \quad \frac{-7}{P} = -1$

$\Rightarrow \quad P = 7$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 1$ की नाभि तथा उत्केन्द्रता के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त के समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं—

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

जहाँ $a^2 = 9$ तथा $b^2 = 4$

तब,

(1) $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$e^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow \quad e = \sqrt{\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

(2) नाभियों के निर्देशांक

$, \quad \left\{\pm \frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right\} \quad \frac{\sqrt{5}}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 36. बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (– 4, 7, 2) और (5, – 3, – 2) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है ?

हल : बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण होगा–

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z-3}{c} \quad ...(1)$$

बिन्दुओं (– 4, 7, 2) और (5, – 3, – 2) को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात होंगे–

5 + 4, – 3 – 7, – 2 – 2 अर्थात् 9, – 10, – 4

रेखा (1) और बिन्दुओं (– 4, 7, 2) और (5, – 3, – 2) को मिलाने वाली रेखा समान्तर हैं।

इसलिए $\frac{a}{9} = \frac{b}{-10} = \frac{c}{-4} = k$ (माना)

$\Rightarrow$ $a = 9k, b = -10k, c = -4k$

a, b, c के मान समीकरण (1) में रखने पर रेखा का अभीष्ट समीकरण होगा–

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{-10} = \frac{z-3}{-4}$$

उत्तर

अथवा

प्रश्न–उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (2, – 3, + 1) तथा (3, 4, 5) को मिलाने वाली रेखा को 1 : 3 के अनुपात में बाह्यत: विभाजित करते हैं।

हल : माना बिन्दुओं P (2, – 3, 1) और Q (3, 4, 5) को मिलाने वाली रेखा को 1 : 3 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाला बिन्दु R (x, y, z) है तब सूत्र

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

तथा $$z = \frac{m_1z_2 + m_2z_1}{m_1 + m_2}$$

मान रखने पर $$x = \frac{1 \times 3 + (-3) \times 2}{1-3}$$

$$x = \frac{3-6}{-2} = \frac{-3}{-2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1 \times 4 + (-3) \times (-3)}{1-3} = \frac{4+9}{-2}$$

$$y = -\frac{13}{2}$$

$$z = \frac{1 \times 5 + (-3) \times 1}{1-3} = \frac{5-3}{-2}$$

$$z = -\frac{2}{2} = -1$$

अत: अभीष्ट निर्देशांक $\left(\frac{3}{2}, \frac{-13}{2}, -1\right)$ होंगे।

प्रश्न 37. यदि $y = \sqrt{e^x + \sqrt{e^x + \sqrt{e^x +}}}$ ..... + ∞ हो, तो “द्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2y - 1}$$

हल : दिया है— $\quad y = \sqrt{e^x + e^x + \sqrt{e^x + ...\infty}}$

तब $\quad y = \sqrt{e^x + y}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $y^2 = e^x + y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x + y)$

$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = e^x + \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \quad 2v\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = e^x$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(2y - 1) = e^x$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2y - 1}$ **“द्ध हुआ।**

अथवा

प्रश्न—वक्र $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ के बिन्दु (0, 5) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्र. क्र. 38 (अथवा) की तरह हल करें।

प्रश्न 38. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x}\, dx$

माना $\quad I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x}\, dx \quad$ ...(1)

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1 + \sin(\pi - x)}\, dx$$

$$\left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx\right]$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1 + \sin x}\, dx \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x + \pi - x}{1 + \sin x}\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x}\, dx$$

या

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x}\, dx$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} (\sec^2 x - \tan x \sec x)\, dx$$

$$2I = \pi \left[\tan x - \sec x\right]_0^{\pi}$$

$$2I = \pi\,[(\tan \pi - \sec \pi) - (\tan 0 - \sec 0)]$$

$$2I = \pi\,[0 - (-1) - (0 - 1)]$$

$$2I = 2\pi$$

$\therefore$ $I = \pi$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos x - \sin x$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया है अवकलन समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos x - \sin x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cos x - \sin x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + \cos x + c_1 \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) का पुनः x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\int \frac{dy}{dx}\, dx = \int (\sin x + \cos + c_1)\, dx$$

$$= \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx + c_1 \int dx$$

$$= -\cos x + \sin x + c_1 x + c_2$$

यह अभीष्ट हल है।

❑

छत्तीसगढ़ राज्य ओपन स्कूल परीक्षा

सॉल्वड पेपर—मई-जून, 2012

कक्षा 12वीं

विषय : गणित

सेट—2

समय : 3 घण्टे] **[पूर्णांक : 100**

निर्देश—(i) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है। (ii) आवश्यकतानुसार चित्र अंकित करें। (iii) प्रश्न क्रमांक 1 से 22 तक पर 1 अंक, प्रश्न क्रमांक 23 से 31 तक 4 अंक एवं प्रश्न क्रमांक 32 से 38 तक 6 अंक निर्धारित हैं।

1. $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)$ का मान होगा—

(a) – 4 (b) 4 (c) – 8 (d) 8.

उत्तर—(b) 4.

2. $(1+\omega^4+\omega^8)$ का मान होगा—

(a) ω (b) ω^2 (c) 0 (d) 1.

उत्तर—(c) 0.

3. $x^2+6x+9=0$ का मूल होगा—

(a) 3, – 3 (b) – 3, 3 (c) 3, 3 (d) – 3, – 3.

उत्तर—(d) (– 3, – 3).

4. 5 और 20 का गुणोत्तर माध्य होगा—

(a) 10 (b) 4 (c) $\frac{25}{2}$ (d) 100.

उत्तर—(a) 10

5. यदि $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ m & m \end{vmatrix} = 21$ हो तो m का मान होगा—

(a) 3 (b) – 3 (c) 21 (d) 12.

उत्तर—(a) 3.

6. यदि A = {4, 5} और B = {1, 2} हो तो A × B का मान लिखिए।

हल : दिया है— A = {4, 5}

B = {1, 2}

तब A × B = {(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)}

7. $\frac{3\pi}{4}$ रेडियन को अंश में बदलो—

हल : ∵ 1 रेडियन = $\frac{180^{o}}{ð}$

∴ $= \frac{ð}{4}$ रेडियन

$= \frac{180}{ð} \times \frac{ð}{4} = \frac{45^{o}}{1} \times \frac{3}{1}$

$= 135^{o}$

या $\frac{ð}{4}$ रेडियन = 135^{o}.

8. यदि $x = a \cos\theta$ और $y = a \sin\theta$ हो, तो $x^2 + y^2$ का मान लिखिए।

हल : $x = a\cos\theta$

$y = a\sin\theta$

प्रश्नानुसार, $x^2 + y^2 = (a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2$

$= a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta$

$= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= a^2 \times 1$

$= a^2$ **उत्तर**

9. $(2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1)$ का सूत्र है—

(a) $\cos 2\theta$ (b) $\sin 2\theta$ (c) $\sin\theta$ (d) $\cos\theta$.

उत्तर—(d) $\cos\theta$.

10. यदि A = $\frac{\pi}{3}$ हो, sin 3A का मान होगा—

(a) – 1 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

उत्तर—(b) 1.

11. यदि $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हो तो उसका व्यापक मान क्या होगा ?

हल : $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \sin\frac{ð}{3}$

∴ $\sin\theta = \sin\frac{ð}{3}$

$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{ð}{3}, n \varepsilon I$. **उत्तर**

12. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ का मान होगा—

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{ð}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर—(c) $\frac{ð}{2}$.

13. यदि $\bar{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ और $\bar{b} = 4\hat{i} + \hat{j}$ हो तो $\bar{a} . \bar{b}$ का मान लिखिए।

हल :

$$\begin{aligned} \bar{a} . \bar{b} &= (2\hat{i} - 3\hat{j})\,(4\hat{i} + \hat{j}) \\ &= (2 \times 4)\, i^2 - (3 \times 1)\, j^2 \\ &= 8 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

उत्तर

14. यदि A और B के स्थिति सदिश क्रमशः $(\bar{a} + \bar{b})$ और $(\bar{a} - \bar{b})$ हो तो $\overline{AB}$ का मान होगा—

(a) $2a$ (b) $2b$ (c) $-2a$ (d) $-2b$.

उत्तर—(d) $-2b$.

15. 4, 7, 2, 1, 5, 8, 9 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : पदों को आरोही क्रम में लिखने पर 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9

पदों की संख्या N = 7

$$\text{माध्यिका} = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ वें पद का मान}$$

$$= \left(\frac{7+1}{2}\right) \text{ वें पद का मान} = \left(\frac{8}{2}\right) \text{ वें पद का मान}$$

$$= 4\text{वें पद का मान}$$

$$= 5$$

उत्तर

16. एक थैली में 5 सफेद और 10 काली गेंद हैं। उससे यादृच्छिक एक सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता होगी—

(a) $^2\!/_3$ (b) $^1\!/_3$ (b) $^1\!/_2$ (d) $^3\!/_2$.

उत्तर—(b) $^1\!/_3$.

17. यदि $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \theta$ हो तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \theta$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$ उत्तर

18. $\int \sec x\, dx =$ **.........**

उत्तर—$\log(\sec x + \tan x) + c$

19. $\lim_{n \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} =$ **...........**

उत्तर—na^{n-1}.

20. $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ **का मान होगा—**

(a) 0 (b) 1

(c) – 1 (d) π.

उत्तर—(d) π.

21. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ **को हल करिए।**

हल : $$\int \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} dx$$

$\Rightarrow$ $$\int \tan x . \sec x\, dx$$

$\Rightarrow$ $$\sec x + c$$ उत्तर

22. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ **का समाकल गुणांक .... होता है।**

उत्तर—$e^{\int P dx}$.

प्रश्न 23. यदि वर्ग समीकरण $lx^2 + nx + n = 0$ के मूलों का अनुपात $p : q$ हो तो, "सिद्ध करें कि $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = 0$.

हल : माना कि समीकरण $lx^2 + nx + n = 0$ के मूल α, β हैं।

तब $$\alpha + \beta = -\frac{n}{l} \quad ...(1)$$

$$\alpha\beta = \frac{n}{l} \quad ...(3)$$

प्रश्नानुसार, $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \quad ...(3)$$

अब $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{n}{l}}$

$$= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\frac{n}{l}}$$

$$= \frac{-n/l}{\sqrt{n/l}} + \sqrt{\frac{n}{l}} \qquad \text{[समी. (1) व (2) से]}$$

$$= -\sqrt{\frac{n}{l}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = 0$$

“द्ध हुआ।

अथवा

प्रश्न—“द्ध करें कि $(1 - \omega + \omega^2)^5 + (1 + \omega - \omega^2)^5 = 32$.

हल : $1 + \omega + \omega^2 = 0$

$\therefore$ $1 + \omega^2 = -\omega$ और $1 + \omega = -\omega^2$

$$(1 - \omega + \omega^2)^5 + (1 + \omega - \omega^2)^5 = (-\omega - \omega)^5 + (-\omega^2 - \omega^2)^5$$
$$= (-2\omega)^5 + (-2\omega^2)^5$$
$$= -32\,\omega^5 - 32\,\omega^{10}$$
$$= -32\,(\omega^5 - \omega^{10})$$
$$= -32\,[\omega^3.\omega^2 + (\omega^3)^3 . \omega]$$
$$= -32\,(1.\ \omega^2 + (1)^3 . \omega)$$
$$= -32\,(\omega^2 + \omega)$$
$$= -32 \times (-1) \qquad (\because\ 1 + \omega + \omega^2 = 0)$$
$$= 32$$

उत्तर

प्रश्न 24. ${}^nP_6 = 30\ {}^nP_4$ हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : ${}^nP_6 = 30\ {}^nP_4$

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor n-6} = 30 \times \frac{\lfloor n}{\lfloor n-4}$$

$$\frac{\lfloor n-4}{\lfloor n-6} = 30$$

$\Rightarrow$ $\frac{(n-4)(n-5)\lfloor n-6}{\lfloor n-6} = 30$

$\Rightarrow$ $(n-4)(n-5) = 30$

$\Rightarrow$ $n^2 - 4n - 5n + 20 = 30$

$\Rightarrow$ $n^2 - 9n + 20 - 30 = 0$

$\Rightarrow$ $n^2 - 9n - 10 = 0$

$\Rightarrow$ $n^2 - 10n + n - 10 = 0$

$\Rightarrow$ $n(n-10) + 1(n-10) = 0$

$\Rightarrow \quad (n-10)(n+1) = 0$

$\Rightarrow \quad n-10 = 0$ या $n+1=0$

$\Rightarrow \quad n = 10$ या $n = -1 \qquad [\because n \neq 1]$

अत: $\quad n = 10$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न— $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$ **के विस्तार में अचर पद ज्ञात कीजिए।**

हल : $(x+a)^n$ के विस्तार में $(r+1)$ वाँ पद

$$T_{r+1} = {}^nC_r \,.\, x^{n-r} \,.\, a^r$$

यहाँ पद $n = 9, x = x^2, a = \frac{1}{x}$.

अत: $$T_{r+1} = {}^9C_r\,(x^2)^{9-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= {}^9C_x \frac{x^{18-2r}}{x^r}$$

$$= {}^9C_r \,.\, x^{18-3r}$$

अचर पद के लिए, $\quad 18 - 3r = 0$

$\Rightarrow \quad 3r = 18$

$\Rightarrow \quad r = \frac{18}{3} = 6$

$$T_{6+1} = {}^9C_6 \,.\, x^{18-3\times 6}$$

$$= {}^9C_6 \,.\, x^0$$

$$= \frac{\lfloor 9}{\lfloor 6 \lfloor 9-6} = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 6 \lfloor 3}$$

$$= \frac{9\times 8\times 7\times \lfloor 6}{\lfloor 6 \times 3\times 2\times 1} = 84$$ **उत्तर**

प्रश्न 25. "द्ध करें कि $\int \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = 2\tan\theta + 2\sec\theta - x + c.$

हल : $$\text{L.H.S.} = \int \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{(1+\sin\theta)^2}{1^2-\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \qquad d\theta$$

$$= \int \sec^2 \theta \, d\theta + \int \tan^2 \theta \, d\theta + 2 \int \tan \theta \sec \theta \, d\theta$$

$$= \int \sec^2 \theta \, d\theta + \int (\sec^2 \theta - 1) \, d\theta + 2 \sec \theta$$

$$= 2 \tan \theta + 2 \sec \theta - \theta + c.$$ “द्ध हुआ।

अथवा

प्रश्न—यदि $f(x) = x^2 + 3$ और $g(x) = x - 2$ हो, तो “द्ध करें कि

$$fog \neq gof$$

हल :

$$fog(x) = f(g(x))$$
$$= f(x-2)$$
$$= (x-2)^2 + 3$$
$$= x^2 - 4x + 4 + 3$$
$$fog = x^2 - 4x + 7 \qquad ...(1)$$

तथा

$$gof(x) = g(f(x))$$
$$= g(x^2 + 3)$$
$$= x^2 + 3 - 2$$
$$gof = x^2 + 1 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) और (2) से स्पष्ट है कि

$$fog \neq gof$$ “द्ध हुआ।

प्रश्न 26. यदि $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ हो तो “द्ध करें कि $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$.

हल : दिया है—

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \qquad \tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha . \tan \beta} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha . \tan \beta$$

$$\Rightarrow \qquad \tan \alpha + \tan \alpha . \tan \beta + \tan \beta = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \tan \alpha (1 + \tan \beta) + 1 (\tan \beta + 1) = 1 + 1$$

$$\Rightarrow \qquad (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$$ “द्ध हुआ।

अथवा

प्रश्न—यदि $a = 2, b = 2\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{B} = 60^{\circ}$ हो तो $\sqrt{A}$ और $\sqrt{C}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : ज्या सूत्र—

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

इनमें मान रखने पर, =

$\Rightarrow$ = = 2 × = 4

$\Rightarrow$ $\sin A = \frac{2}{4}$

$\Rightarrow$ $\sin A = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\sin A = \sin 30^{\circ}$

$\Rightarrow$ $A = 30^{\circ}$

$\therefore$ $\angle A = 30^{\circ}$ **उत्तर**

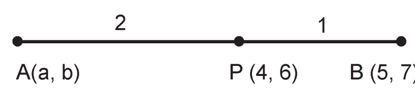
प्रश्न 27. बिन्दु (*a*, *b*) और (5, 7) के बीच की दूरी को बिन्दु (4, 6), 2 : 1 में आन्तरिक विभाजित करता है, तो *a* और *b* का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

यहाँ $A(x_1, y_1) = (a, b)$

$B(x_2, y_2) = (5,7)$

$P(x, y) = (4, 6)$



तथा $m_1 = 2, m_2 = 1$

$\therefore$ $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

$\Rightarrow$ $4 = \frac{2 \times 5 + 1 \times a}{2 + 1} = \frac{10 + a}{3}$

$\Rightarrow$ $10 + a = 12$

$\Rightarrow$ $a = 12 - 10 = 2$

पुनः $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

$\Rightarrow$ $6 = \frac{2 \times 7 + 1 \times b}{2 + 1} = \frac{14 + b}{3}$

$\Rightarrow$ $14 + b = 18$

$\Rightarrow$ $b = 18 - 14 = 4$

अतः $a = 2$ तथा $b = 4$. **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—$x^2 + y^2 + 10x - 8y - 40 = 0$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का दिया गया समीकरण है :

$x^2 + y^2 + 10x - 8y - 40 = 0$

इसकी व्यापक समीकरण

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर

$$2g = 10$$

$$\therefore \quad g = 5$$

$$2f = -8$$

$$f = -4$$

$$c = -40$$

अतः वृत्त का केन्द्र $(-g, -f) = [-5, -(-4)]$

$= (-5, +4)$ है।

एवं त्रिज्या $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2 - (-40)}$

$$r = \sqrt{25 + 16 + 40} = \sqrt{81}$$

$$r = 9$$

वृत्त का केन्द्र (– 5, 4) तथा त्रिज्या 9 होगी। **उत्तर**

प्रश्न 28. रेखाओं $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$ और $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{4}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये रेखाओं का समीकरण है :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

जहाँ $a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ c_1 = -1$

$a_2 = 3,\ b_2 = 4,\ c_2 = 5$

माना इन रेखाओं के बीच का कोण θ है।

तब $$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$= \frac{1 \times 3 + 0 \times 4 + (-1) \times 5}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2}.\sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (5)^2}}$$

$$= \frac{3 + 0 - 5}{\sqrt{1 + 0 + 1}.\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{-2}{\sqrt{2}.\sqrt{50}} = \frac{-2}{\sqrt{2}.\sqrt{2 \times 25}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{2 \times 5}} = \frac{-2}{2 \times 5} = \frac{-2}{10}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{5}\right)$$ **उत्तर**

प्रश्न—सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ एवं $4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\bar{a} = i + 2j + k$ तथा $\bar{b} = 4i - 3j - 2k$

तो $|\bar{a}| = a = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$|\bar{b}| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$

तब $\vec{a}\,.\,\vec{b} = ab\cos\theta$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{ab}$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{4+6-2}{\sqrt{6}\times\sqrt{29}} = \dfrac{8}{\sqrt{174}}$

$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{8}{\sqrt{174}}\right)$ उत्तर

प्रश्न 29. यदि $y = x^{x^{x^{\cdots\cdots\infty}}}$ हो, तो "द्ध करें कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x(1 - y\log x)}$.

हल : दिया है— $y = x^{x^{x^{x^{\cdots\cdots\infty}}}}$

माना $y = x^y$

दोनों पक्षों का log लेने पर, $\log y = x^y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log x^y)$$

$$= \frac{d}{dx}(y\,.\,\log x)$$

$$= y\frac{1}{x} + \log x\frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} - \log x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1}{y} - \log x\right) = \dfrac{y}{x}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1 - y\log x}{y}\right) = \dfrac{y}{x}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \times \dfrac{y}{1 - y\log x}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x(1 - y\log x)}$ सिद्ध हुआ।

अथवा

प्रश्न—यदि $y = \sin^{-1}\left[\frac{2x}{1+x^2}\right]$ हो तो, $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

माना $x = \tan\theta$

तब, $y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$\Rightarrow$ $y = 2\theta$

$\Rightarrow$ $y = 2\tan^{-1} x$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$ **उत्तर**

प्रश्न 30. निम्न सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

वर्ग	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
आवृत्ति	2	7	10	3	3

हल :

वर्ग-अन्तराल	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
0–20	2	2
20–40	7	9
40–60	10	19
60–80	3	22
80–100	3	25

यहाँ, $N = 25$

$\therefore$ $\frac{N}{2} = \frac{25}{2} = 12{\cdot}5$

$\because$ 12·5 का मान संचयी आवृत्ति 19 के अन्तर्गत आता है, अत: 40–60 माध्यिका वर्ग होगी।

माध्यिका $M_d = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$ $L_1 = 40, L_2 = 60, f = 10,$

$\frac{N}{2} = 12{\cdot}5, C = 9$

$$\therefore M_d = 40 + \frac{60-40}{100}(12\cdot5 - 9) = 40 + \frac{20}{10} \times 3\cdot5 = 40 + 2 \times 3\cdot5 = 47$$

उत्तर

अथवा

प्रश्न—निम्न सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृत्ति	5	12	20	9	4

हल :

क्र.	वर्ग	बारम्बारता
1	0–10	5
2	10–20	12
3	20–30	20
4	30–40	9
5	40–50	4

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि सबसे अधिक बारम्बारता 20 है जो वर्ग अन्तराल 20–30 में आता है। अत: 20–30 बहुलक वर्ग होगा—

यहाँ $l_1 = 20, l_2 = 30, f_1 = 20, f_0 = 12, f_2 = 9.$

सूत्र : बहुलक $M_0 = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(l_2 - l_1)$

$$= 20 + \frac{20-12}{2 \times 20 - 12 - 9}(30-20)$$

$$= 20 + \frac{8}{40-21}(10)$$

$$= 20 + \frac{80}{19}$$

$$= 20 + 4\cdot21$$

$$= 24\cdot21.$$

दिये गये आँकड़ों का बहुलक 24·21 होगा। **उत्तर**

प्रश्न 31. निम्न सारणी से मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृत्ति	2	10	8	4	6

हल : छात्र देखें सेट-1 वर्ष 2012 (दिसम्बर) का प्रश्न क्रमांक 31 का हल।

अथवा

प्रश्न—दो पाँसे एक साथ फेंकने में प्रायिकता ज्ञात करें कि कुल योग न तो 7 हो और न ही 11 हो।

हल : माना प्रतिदर्श समष्टि S है तब n (S) = 36.

योग न 7 और न ही 11 आने की घटना E हो,

$$n(E) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6)$$
$$(3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 1)$$
$$(4, 2), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1)$$
$$(5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 2), (6, 3)$$

$\therefore$ $$n(E) = 28$$

अत: अभीष्ट प्रायिकता

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{28}{36}$$

$$P(E) = \frac{7}{9}$$ **उत्तर**

प्रश्न 32. किसी गुणोत्तर श्रेढी के अनन्त पदों का योगफल 15 एवं उनके वर्गों का योगफल 45 हो, तो श्रेढी ज्ञात करें।

हल : माना कि गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद a तथा पदान्तर r है जबकि $|r| < 1$ तब

$$\frac{a}{1-r} = 15 \qquad ...(1)$$

गुणोत्तर श्रेढी के पदों का वर्ग करने पर प्राप्त गुणोत्तर श्रेढी है—

$$a^2, a^2r^2, a^2r^4, a^2r^6 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

इस श्रेढी के अनन्त पदों का योगफल $= \frac{a^2}{1-r^2}$

प्रश्नानुसार $$\frac{a^2}{1-r^2} = 45 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का वर्ग करके प्राप्त परिणाम में समीकरण (2) से भाग देने पर,

$$\frac{\frac{a^2}{(1-r)^2}}{\frac{a^2}{1-r^2}} = \frac{15 \times 45}{45}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{(1-r)^2} \times \frac{(1+r)(1-r)}{a^2} = \frac{15 \times 15}{45}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+r}{1-r} = 5$$

$\Rightarrow \quad 1 + r = 5 - 5r$

$\Rightarrow \quad 6r = 4$

$\Rightarrow \quad r = \frac{6}{4} = \frac{2}{3}$

अब r का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{a}{1 - \frac{2}{3}} = 15$$

$\Rightarrow \quad 3a = 15$

$\Rightarrow \quad a = 5$

अतः अभीष्ट श्रेढी $5, 5 \times \frac{2}{3}, 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$, ...

अर्थात् $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}$,......... हुई। **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—गणितीय आगमन विधि से "द्ध करें कि

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

हल : $\quad P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

तब $n = 1$ के लिए कथन P (1) का

L.H.S. $= 1^2 = 1$ और

R.H.S. $= \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1$

$\therefore \quad$ P (1) सत्य है।

माना $n = m \varepsilon$ N (प्राकृतिक संख्याओं का समच्चय) के लिए

$$P(m) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

सत्य है तब, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + m^2\ (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$

या $\quad P(m+1) = \frac{m+1}{6}[m(2m+1) + 6(m+1)]$

$$= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$= \frac{\overline{(m+1)}\,\overline{(m+1+1)}\{2\overline{(m+1)}+1\}}{6}$$

$\therefore$ P (m + 1) सत्य है।

अत: गणितीय आगमन "द्धान्त से दिया हुआ कथन n प्रत्येक धन पूर्णांक मान के लिए सत्य है।

प्रश्न 33. निम्न आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करें।

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

हल :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 2(4+9) - 2(-6-6) - 3(9-4) \\ &= 2 \times 13 - 2(-12) - 3 \times 5 = 26 + 24 - 15 \\ &= 50 - 15 \\ &= 35 \neq 0 \end{aligned}$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व होगा

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = 4 + 9 = 13$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -(-6-6) = 12$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$A_{27} = -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = -(4-9) = (-5) = 5$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 4 + 6 = 10$$

$$A_{23} = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -(-6-4) = 10$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 6 + 6 = 12$$

$$A_{32} = -\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = (6-9) = 3$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = 4 + 6 = 10$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 12 & 10 & 3 \\ 5 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj A}}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 12 & 10 & 3 \\ 5 & 10 & 10 \end{bmatrix}}{35}$$

$$A-1 = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 12 & 10 & 3 \\ 5 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—"द्ध करें कि

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \\ \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{b^3} & \boldsymbol{c^3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{abc\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}$$

हल : माना $= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$$= abc \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$ [c_1 से a, c_2 से b व c_3 से c उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= abc \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ $\begin{bmatrix} c_1 \to c_1 - c_2 \text{ तथा} \\ c_2 \to c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ (a-b)(a+b) & (b-c)(b+c) & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (abc)\,(a-b)\,(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

[c_1 से $(a-b)$ तथा c_2 से $b-c$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (abc)\,(a-b)\,(b-c) \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$$

[R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर]

$= (abc)(a-b)(b-c)[b+c-a-b]$

$\Rightarrow \quad \Delta = abc\,(a-b)(b-c)(c-a)$ "द्ध हुआ।

प्रश्न 34. Δ **ABC में** $\dfrac{1}{(a+b)}+\dfrac{1}{(a+c)}=\dfrac{3}{(a+b+c)}$ **हो, तो** $\angle$**A का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : दिया गया है— $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$

ज्ञात करना है— $\angle A = a$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a+c+a+b}{(a+b)(a+c)}=\frac{3}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow (2a+b+c)(a+b+c) = 3(a+b)(a+c)$$

$$\Rightarrow 2a^2+ab+ac+2ab+b^2+bc+2ac+bc+c^2$$
$$= 3(a^2+ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow 2a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc = 3a^2+3ab+3ac+3bc$$

$$\Rightarrow 2a^2+b^2+c^2+2bc = 3a^2+3bc$$

$$\Rightarrow 2a^2+b^2+c^2+2bc-3a^2-3bc = 0$$

$$\Rightarrow -a^2+b^2+c^2-bc = 0$$

$$\Rightarrow b^2+c^2-a^2 = bc$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A = \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 60^\circ$$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—"द्ध करें कि—

$$\cos^{-1} x = 2\cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}}{2}\right]$$

हल : माना कि $x = \cos\theta$ है तब $\theta = \cos^{-1} x$.

$$\text{R.H.S.} = 2\cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}}{2}\right]$$

$$= 2\cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{2}\right]$$

$$= 2\cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}}{2}\right]$$

$$= 2\cos^{-1}\left[\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2}\right] = 2\cos^{-1}\left[\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= 2\times\frac{\theta}{2} = \theta$$

$= \cos^{-1}x = $ L.H.S. “द्ध हुआ।

प्रश्न 35. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाता है तथा दोनों अक्षों से ऐसे अन्तःखण्ड काटती है जिनके लम्बाइयों का योगफल 6 है।

हल : माना कि X-अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड a है। तब Y-अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड $6 - a$ हुआ।

अतएव रेखा का समीकरण है—

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{6-a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad (6 - a)\,x + ay = a\,(6 - a) \qquad ...(1)$$

यदि यह रेखा बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है, तो

$$\begin{aligned}
(6 - a) \times 1 \times a \times 2 &= a\,(6 - a)\\
\Rightarrow \quad 6 - a + 2a &= 6a - a^2\\
\Rightarrow \quad 6 + a &= 6a - a^2\\
\Rightarrow \quad a^2 - 5a + 6 &= 0\\
\Rightarrow \quad a^2 - 3a - 2a + 6 &= 0\\
\Rightarrow \quad a(a - 3) - 2\,(a - 3) &= 0\\
\Rightarrow \quad (a - 2)\,(a - 3) &= 0
\end{aligned}$$

अतः $a = 2$ या $a = 3$.

जब $a = 2$, तब समीकरण (1) से,

$$\begin{aligned}
(6 - 2)x + 2y &= 2(6 - 2)\\
\Rightarrow \quad 4x + 2y &= 8\\
\Rightarrow \quad 2x + y &= 4
\end{aligned}$$

पुनः, जब $a = 3$ तब समीकरण (1) से,

$$\begin{aligned}
(6 - 3)x + 3y &= 3(6 - 3)\\
\Rightarrow \quad 3x + 3y &= 9\\
\Rightarrow \quad x + y &= 3
\end{aligned}$$

अतः अभीष्ट सरल रेखाओं का समीकरण

$2x + y = 4$ अथवा $x + y = 3$ होगा। **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ की उत्केन्द्रता, नाभियों के निर्देशांक और अक्षों की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त के समीकरण को अग्र रूप में लिख सकते हैं—

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

जहाँ $a^2 = 4$ तथा $b^2 = 3$.

तब (1) $$e^2 = 1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{3}{4}=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$$

(2) नाभियों के निर्देशांक (1, 0) तथा (– 1, 0) हैं। [$\because$ निर्देशांक ($\pm ae$, 0)]

(3) दीर्घ अक्ष की लम्बाई $2a = 2 \times 2 = 4$

(4) लघु अक्ष की लम्बाई $2b = 2\sqrt{3}$ उत्तर

प्रश्न 36. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $2x - 2y - z - 10 = 0$ को स्पर्श करता है तथा जिसका केन्द्र (3, 6, – 4) है।

हल : चूँकि दिये हुए समतल में

$$2x - 2y - z - 10 = 0 \qquad ...(1)$$

को स्पर्श करता है। अतएव गोले के केन्द्र (3, 6, – 4) से समतल (1) पर डाला गया लम्ब गोले की त्रिज्या के बराबर होगा।

$\therefore$ गोले की त्रिज्या $= \dfrac{2\times3-2\times6+4-10}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}$

$= \dfrac{6-12+4-10}{\sqrt{9}}$

$= \dfrac{-12}{3} = 4$ (संख्यात्मक मान)

अत: अभीष्ट गोले का समीकरण है–

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 4^2$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 + z^2 + 8z + 16 = 16$

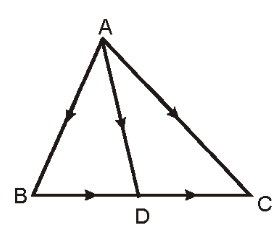
$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 8z + 45 + 16 - 16 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 8z + 45 = 0$ उत्तर

अथवा

प्रश्न–किसी ΔABC में BC का मध्य बिन्दु D हो, तो “द्ध करें कि

$$\overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{AC}} = 2\,\overline{\mathbf{AD}}$$



हल : ΔABD में, $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ ...(1)

$\therefore$ त्रिभुज के योग नियम

ΔABD में, $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{AD}$$

$\Rightarrow \quad \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CD} = 2\vec{AD}$ ...(3)

$\because$ D, BC का मध्य बिन्दु

$\therefore$ $$\vec{BD} = \vec{DC}$$

$$\vec{BD} = -\vec{CD} \qquad [\because \vec{DC} = -\vec{CD}]$$

$\Rightarrow$ $$\vec{BD} + \vec{CD} = 0 \qquad ...(4)$$

समीकरण (3) व (4) से, $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{0} = 2\vec{AD}$

$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AD}$$ "द्ध हुआ।

प्रश्न 37. अवकल समीकरण

***x* (*x* – *y*) *dy* + *y*² *dx* = 0 को हल कीजिए।**

हल : दिया गया अवकल समीकरण है—

$$x(x-y)dy + y^2dx = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(y-x)}$$

यह एक सम्पात अवकल समीकरण है।

अत: $y = vx$ तथा $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$ प्रतिस्था"त करने पर,

$$v + x\frac{dy}{dx} = \frac{v^2y^2}{x(vx+x)}$$

$\Rightarrow$ $$v + x\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{v-1}$$

$\Rightarrow$ $$x\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{v-1} - \frac{v}{1}$$

$\Rightarrow$ $$x\frac{dy}{dx} = \frac{v}{v-1}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x}{dx} = \left(\frac{v}{v-1}\right)\frac{1}{dv}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dx}{x} = \left(\frac{v-1}{v}\right)dv$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dx}{x} = \left(1 - \frac{1}{v}\right)dv$$

समाकलन करने पर,

$\Rightarrow$ $$\int\frac{dx}{x} = \int\left(1 - \frac{1}{v}\right)dv$$

$\Rightarrow$ $$\log x = v - \log v + c_1$$

$\Rightarrow$ $$\log x + \log v = \log_e e^v + \log c$$

$\Rightarrow$ $$\log(vx) = \log(c, e^v)$$

$\Rightarrow \qquad vx = ce^v$

$\Rightarrow \qquad y = c.e^{y/x}$

अथवा

प्रश्न—रेखा $y = x$ एवं वक्र $y^2 + 16x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल : वक्र का समीकरण है : $y^2 = 16x$ ...(1)

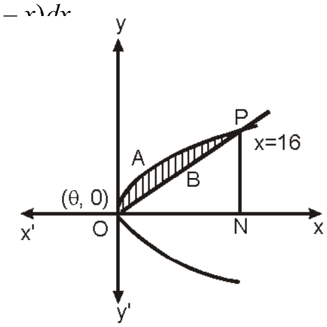
रेखा का समीकरण है : $y = x$ ...(2)

वक्र और रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दुओं के भुजा के लिए समीकरण (2) से y का मान समीकरण (1) में रखने पर, $x^2 = 16x$

$\Rightarrow \qquad x(x-16) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 16$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = OAPNO – क्षेत्रफल OBPNO

$$= \int_0^{16} (y_1 - y_2)dx = \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)dx$$



$$= 4\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{-16} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{16}$$

$$= \frac{8}{3}(16^{3/2} - 0) - \frac{1}{2}[16^2 - 0]$$

$$= \frac{8}{3} \times 4^{4\times\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \times 16 \times 16$$

$$= \frac{8}{3} \times 4 \times 4 \times 4 - 16 \times 8 = \frac{8 \times 16 \times 4}{3} - 16 \times 8$$

$$= 16 \times 8\left(\frac{4}{3} - 1\right) = 16 \times 8 \times \frac{1}{3} = \frac{128}{3}$$ वर्ग इकाई

प्रश्न 38. $\int \frac{1}{5 - 4\sin x} dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : माना $\qquad I = \int \frac{dx}{5 - 4\sin x}$

$$= \int \frac{dx}{5\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) - 4 \times 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{5\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) - 8\tan\frac{x}{2}}$$

हर व अंश में $\sec^2 \frac{x}{2}$ से गुणा करने पर.

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{5 + 5\tan^2 \frac{x}{2} - 8\tan\frac{x}{2}}$$

अब माना $\tan\frac{x}{2} = t$ तब

$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dt$$

$$\Rightarrow \quad \sec^2\frac{x}{2}dx = 2dt$$

$$\therefore \quad I = 2\int\frac{dt}{(5t^2 - 8t + 5)}$$

$$= \frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t^2 - \frac{8}{5}t + 1\right)}$$

$$= \frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2 - 2(t)\frac{4}{5} + \frac{16}{25} + 1 - \frac{16}{25}}$$

$$= \frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left[\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]}$$

अब माना $t - \frac{4}{5} - u$ तब $dt = du$

$$\therefore \quad I = \frac{2}{5}\int\frac{du}{u^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{5}\times\frac{1}{\frac{3}{5}}\tan^{-1}\left(\frac{4}{\frac{3}{5}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left[\frac{5}{3}\left(t - \frac{4}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left[\frac{5}{3}\left(\frac{5t - 4}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left[\frac{5\tan\frac{x}{2} - 4}{3}\right]$$

अथवा

प्रश्न—वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ पर स्थित बिन्दु (4, 3) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता तथा अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है— वक्र $x^2 + y^2 = 25$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

तो $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{4,3}$ पर $= \frac{-4}{3}$ ...(1)

हम जानते हैं कि वक्र की स्पर्श रेखा का समीकरण—

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1 y_1)} (y - y_1)$$

$$y - 3 = \frac{-4}{3}(x-4)$$

$\Rightarrow$ $3y - 9 = -4x + 16$

$\Rightarrow$ $4x + 3y - 25 = 0$ **उत्तर**

समीकरण (1) से अभिलम्ब की प्रवणता

$$= \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,3)}} = \frac{-1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

तो वक्र के बिन्दु (4, 3) पर अभिलम्ब का समीकरण

$$(y-3) = \frac{3}{4}(x-4)$$

$$4y - 12 = 3x - 12$$

$$3x - 4y = 0$$

$$3x = 4y$$ **उत्तर**

❑

छत्तीसगढ़ राज्य ओपन स्कूल परीक्षा

सॉल्व्ड पेपर—दिसम्बर, 2011

कक्षा 12वीं

विषय : गणित

सेट—3

समय : 3 घण्टे] **[पूर्णांक : 100**

निर्देश—(1) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है। (2) प्रश्न क्रमांक 1 से 22 तक प्रत्येक पर 1 अंक निर्धारित है। (3) प्रश्न क्रमांक 23 से 31 तक प्रत्येक प्रश्न में 4 अंक निर्धारित हैं। (4) प्रश्न क्रमांक 32 से 38 तक प्रत्येक प्रश्न में 6 अंक निर्धारित हैं।

सही विकल्प चुनकर लिखिए— (प्रश्न 1 से 15 तक)

1. $3 - 4i$ का मापांक है—

(a) 9 (b) 16 (c) 25 (d) 5

उत्तर—(d) 5.

2. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ की कोटि है—

(a) 1×3 (b) 3×1 (c) 2×3 (d) 3×2

उत्तर—(b) 3×1.

3. $(1 - \omega + \omega^2)^3$ का मान होगा—

(a) – 8 (b) 8 (c) 3 (d) 32

उत्तर—– 8.

4. गुणोत्तर श्रेढी $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots \infty$ के अनन्त पदों का योगफल होगा—

(a) $\frac{a}{1+r}$ (b) $\frac{a}{1-r}$ (c) $\frac{r}{1-r}$ (d) $\frac{r}{1+r}$

उत्तर—(b) $\frac{a}{1-r}$.

5. यदि A = {1, 3, 5, 7, 9} और B = {3, 7, 9} हो तो A – B का मान होगा—

(a) {1, 5} (b) {1, 7} (c) {1, 9} (d) {3, 7, 9}

उत्तर—(a) {1, 5}.

6. $\frac{3\pi}{4}$ **रेडियन का मान अंश में होगा—**

(a) 60º (b) 105º (c) 135º (d) 145º.

उत्तर—(c) 135º.

7. यदि $\theta = \frac{\pi}{4}$ **हो तो 2 sin θ. cos θ का मान होगा—**

(a) 1 (b) – 1 (c) 0 (d) 2

उत्तर—(a) 1.

8. $\cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$ **का मान होगा—**

(a) 0 (b) – 2 (c) – 1 (d) 1

उत्तर—(d) 1.

9. $\frac{\cos 11^\circ - \sin 11^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 11^\circ}$ **का मान होगा—**

(a) tan 56º (b) tan 34º (c) sin 56º (d) cos 56º

उत्तर—(b) tan 34º.

10. यदि किसी रेखा की दिक् कोज्याएँ l, m, n **हैं तो** $l^2 + m^2 + n^2$ **का मान होगा—**

(a) 0 (b) 4 (c) – 1 (d) 1

उत्तर—(d) 1.

11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ **का मान होगा—**

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

उत्तर—(a) 1.

12. $\int \tan x\, dx$ **का मान होगा—**

(a) log (sin x) (b) log (cot x) (c) log (sec x) (d) log (cosec x).

उत्तर—(c) log (sec x).

13. अवकल समीकरण $3\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$ **की कोटि तथा घात होगी—**

(a) 2, 1 (b) 2, 2 (c) 1, 3 (d) 1, 2

उत्तर—(b) (2, 2)

14. एक पाँसे को फेंकने पर 2 से बड़े अंक आने की प्रायिकता होगी—

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{5}{3}$

उत्तर—(b) $\frac{2}{3}$.

15. किसी श्रेढी का समान्तर माध्य 18 तथा माध्यिका 15 है, तो बहुलक का मान होगा—

(a) 18 (b) 15 (c) 33 (d) 9

उत्तर—(d) 9.

प्रश्न 16. श्रेढी 2 + 4 + 6 + ... का *n* पदों का योगफल ज्ञात कीजिए—

हल : यहाँ $a = 2$

$d = 4 - 2$

$d = 2$

सूत्र : $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_n = \frac{n}{2}[2\times 2+(n-1)2]$

$S_n = \frac{n}{2}(2+2n)$

$S_n = \frac{2n(n+1)}{2}$

$S_n = n\ (n + 1)$ **उत्तर**

प्रश्न 17. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega+1+\omega^2 \\ \omega & 1 & \omega^2+\omega+1 \\ \omega^2 & \omega & 1+\omega^2+\omega \end{vmatrix}$

संक्रिया $c_3 \rightarrow c_3 + c_2 + c_1$

$= \begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & 0 \\ \omega & 1 & 0 \\ \omega^2 & \omega & 0 \end{vmatrix}$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= 0$

$\because c_3$ के सभी अवयव शून्य हैं।

प्रश्न 18. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

सूत्र : $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3+2}{6}}{1-\frac{1}{6}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}\right) = \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

उत्तर

प्रश्न 19. यदि सदिश $\bar{a} = 2i-3j+k$ और $\bar{b} = 3i+Pj-5k$ परस्पर लम्बवत् हैं तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सदिश $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ परस्पर लम्ब हैं।

$\therefore \quad \vec{a}.\vec{b} = 0$

$(2i-3j+k).(3\hat{i}+Pj-5k) = 0$

$\Rightarrow \quad 6-3P-5 = 0$

$\Rightarrow \quad -3P+1 = 0$

$\Rightarrow \quad -3P = 1$

$\Rightarrow \quad P = 1/3$

उत्तर

प्रश्न 20. यदि $y = x^2 . \log x$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $y = x^2 \log x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^2 \log x$$

$$= x^2 . \frac{d}{dx}\log_e x + \log_e x \frac{d}{dx}x^2$$

$$= x^2 . \frac{1}{x} + \log_e x . 2x$$

$= x + 2x \log_e x$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^2 \log_e x) = x(1 + 2\log_e x)$ **उत्तर**

प्रश्न 21. $\int \log x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \log_e x\, dx$

$I = \int 1.\log_e x\, dx$

तब $I = \log_e x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}\log_e x \int 1\, dx\right] dx$

$= \log_e x.x - \int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx$

$= \log_e x.x - x + c$

$\therefore \quad \int \log_e x\, dx = x(\log_e x - 1) + c$ **उत्तर**

प्रश्न 22. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$ का समाकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है–

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x \quad ...(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

यहाँ $P = \tan x$, $Q = \sec x$

समाकलन गुणांक (I.F) $= e^{\int p dx}$

$= e^{\int \tan x\, dx}$

$= e^{\log_e (\sec x)}$

$= \sec x$ $[\because e^{\log x} = x]$

समीकरण (1) का हल होगा–

$y.(I.F.) = \int I.F. \times Q dx$

$\Rightarrow \quad y.\sec x = \int \sec x.\sec x dx$

$\Rightarrow \quad y.ec\, x = \int \sec^2 x\, dx$

$\Rightarrow \quad y.\sec x = \tan x + c$

$\Rightarrow \quad y = \frac{\tan x}{\sec x} + \frac{c}{\sec x}$

$\Rightarrow \quad y = \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x + c \cos x$

$\Rightarrow \quad y = \sin x + c.\cos x$ **उत्तर**

प्रश्न 23. यदि वर्ग समीकरण $lx^2 + nx + n = 0$ के मूलों का अनुपात $p : q$ हो तो "द्ध कीजिए कि— $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = 0.$

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 23 का हल।

अथवा

प्रश्न—यदि ${}^nP_3 = 13.{}^nP_2$ हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{n!}{(n-3)!} = 13 \times \frac{n!}{(n-2)!}$

$\frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 13$

$\Rightarrow \quad \frac{(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 13$

$\Rightarrow \quad (n-2) = 13$

$\Rightarrow \quad n - 2 = 13$

$\therefore \quad n = 13 + 2$

$n = 15$ **उत्तर**

प्रश्न 24 (a). श्रेढी 4 + 44 + 444 + ... का n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना n पदों का योगफल S_n है।

$S_n = 4 + 44 + 444 + 4444 + ...$

$S_n = 4 [1 + 11 + 111 + 1111 + ...]$

$S_n = \frac{4}{9}[9 + 99 + 999 + 9999 + ...]$

$S_n = \frac{4}{9}\left[(10-1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ...\right]$

$S_n = \frac{4}{9}[\{10 + 10^2 + 10^3 + ...\} + \{-1-1-1- .... n \text{ पदों तक }\}]$

$S_n = \frac{4}{9}\left[\frac{(10)[10^{n-1}]}{10-1} - n\right]$

$S_n = \frac{40}{81}[10^n - 1] - \frac{4n}{9}$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी का 5वाँ पद 81 तथा दूसरा पद 24 है तो श्रेढी का प्रथम पद और सार्वनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद a तथा पदानुपात r है, तब प्रश्नानुसार

5वाँ पद $= ar^4 = 81$ ...(1)

तथा दूसरा पद $= ar = 24$ ...(2)

समीकरण (1) में समीकरण (2) का भाग देने पर

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{81}{24}$$

$\Rightarrow$ $$r^3 = \frac{27}{8}$$

या $$(r)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$\therefore$ $$r = \frac{3}{2}$$

समीकरण (2) में r का मान रखने पर

$\Rightarrow$ $$ar = 24$$

$\Rightarrow$ $$a \times \frac{3}{2} = 24$$

$\Rightarrow$ $$3a = 24 \times 2$$

$\therefore$ $$a = \frac{24 \times 2}{3}$$

$$a = 16$$

अत: अभीष्ट श्रेढी है—

$$16, 16\left(\frac{3}{2}\right), 16\left(\frac{3}{2}\right)^2, \ldots.$$

अर्थात्,

16, 24, 36, ...

श्रेणी का प्रथम पद = 16

सार्वनुपात $= \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ **उत्तर**

प्रश्न 25. यदि $f(x) = 2x - 1$ तथा $g(x) = x^2 + 3$ हो तो *fog* और *gof* का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
$$(fog) = f[g(x)]$$
$$(fog) = f(x^2 + 3)$$
$$(fog) = 2(x^3 + 3) - 1$$

$$(fog) = 2x^2 + 6 - 1$$
$$(fog) = 2x^2 + 5 \quad ...(1)$$

तथा
$$(gof) = g\,[f(x)]$$
$$= g\,(2x - 1)$$
$$= (2x - 1)^2 + 3$$
$$= 4x^2 - 4x + 1 + 3$$
$$= 4x^2 - 4x + 4$$
$$(gof) = 4\,(x^2 - x + 1) \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि

$$fog \neq gof$$

अथवा

प्रश्न—मान ज्ञात कीजिए—

$\cot^2 30^o + \cot^2 45^o + \cot^2 60^o$

हल : $\cot^2 30^o + \cot^2 45^o + \cot^2 60^o$

$$= (\sqrt{3})^2 + 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= 3 + 1 + \frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{13}{3}$$

उत्तर

प्रश्न 26. “द्ध कीजिए कि—

$$\frac{\sin A + 2\sin 3A + \sin 5A}{\sin 3A + 2\sin 5A + \sin 7A} = \frac{\sin 3A}{\sin 5A}.$$

हल :
$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin A + 2\sin 3A + \sin 5A}{\sin 3A + 2\sin 5A + \sin 7A}$$
$$= \frac{(\sin A + \sin 5A) + 2\sin 3A}{(\sin 3A + \sin 7A) + 2\sin 5A}$$
$$= \frac{2\sin\left(\frac{A + 5A}{2}\right).\cos\left(\frac{A - 5A}{2}\right) + 2\sin 3A}{2\sin\left(\frac{3A + 7A}{2}\right).\cos\left(\frac{3A - 7A}{2}\right) + 2\sin 5A}$$
$$= \frac{\sin 3A \cos 2A + \sin 3A}{\sin 5A \cos 2A + \sin 5A} = \frac{\sin 3A\,(\cos 2A + 1)}{\sin 5A\,(\cos 2A + 1)}$$
$$= \frac{\sin 3A}{\sin 5A}$$
$$= \text{R.H.S.}$$

सिद्ध हुआ

अथवा

प्रश्न—किसी त्रिभुज ABC में, यदि $a = 2C$ और $b = 3C$ हो तो ''द्ध कीजिए कि $\cos B = -1$.

हल : हम जानते हैं कि

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c^2 + (2c)^2 - (3c)^2}{2 \times c \times 2c}$$

$$= \frac{c^2 + 4c^2 - 9c^2}{4c^2} = \frac{-4c^2}{4c^2}$$

$$= -1$$

$$\cos B = -1$$

प्रश्न 27. समान्तर रेखाओं $5x - 12y - 3 = 0$ और $5x - 12y - 6 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई समान्तर रेखाओं के समीकरण हैं—

$$5x - 12y - 3 = 0 \quad ...(1)$$

तथा

$$5x - 12y - 6 = 0 \quad ...(2)$$

मूल बिन्दु (0, 0) से समीकरण (1) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है—

$$P_1 = \frac{-3}{\sqrt{(5)^2 + (-12)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$P_1 = -\frac{3}{\sqrt{169}} = -\frac{3}{13}$$

पुन: मूलबिन्दु (0, 0) से समीकरण (2) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है—

$$P_2 = \frac{-6}{\sqrt{(5)^2 + (-12)^2}}$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{25 + 144}} = -\frac{6}{169}$$

$$= -\frac{6}{13}$$

अत:

$$\text{अभीष्ट दूरी} = P_1 - P_2$$

$$= -\frac{3}{13} - \left(-\frac{6}{13}\right)$$

$$= -\frac{3}{13} + \frac{6}{13}$$

$$= \frac{-3 + 16}{13}$$

$$= \frac{3}{13}$$

उत्तर

अथवा

प्रश्न—उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के "रों के निर्देशांक (3, 4) और (1, 2) हैं तथा वृत्त की त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लो व्यास AB है जहाँ $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ हैं।

A (3, 4) तथा B(1, 2)

$\therefore$ वृत्त का समीकरण

सूत्र $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$(x - 3)(x - 1) + (y - 4)(y - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 1x - 3x + 3 + y^2 - 2y - 4y + 8 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 + y^2 - 6y + 8 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$

यही वृत्त का समीकरण होगा।

इसका व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर,

$\therefore \quad 2g = -4$

$g = -2$

$2f = -6$

$\therefore \quad f = -3$

तथा $c = 11$

वृत्त का केन्द्र $(-g, -f) = [-(-2), -(-3)]$

$= (2, 3)$

त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 - 11}$

$= \sqrt{4 + 9 - 11}$

$= \sqrt{13 - 11}$

$= \sqrt{2}$ **उत्तर**

प्रश्न 28. समतलों $2x - y + 2 = 6$ और $x + y + 2z = 7$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : $2x - y + z = 6$

$\Rightarrow \quad 2x - y + z - 6 = 0$ ...(1)

$x + y + 2z - 7 = 0$ ...(2)

यहाँ, $a_1 = 2, b_1 = -1, c_1 = 1$

$a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 2$

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2\times1+(-1)\times1\times1\times2}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{6}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

उत्तर

अथवा

प्रश्न—एक समतल निर्देशांक्षों को क्रमशः A, B तथा C पर काटता है। यदि त्रिभुज ABC का केन्द्रक (2, – 1, 3) है तो समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना समतल का समीकरण

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r} = 1$$

$$\angle A, B, C \text{ का केन्द्रक} = \left(\frac{p}{3},\frac{q}{+3},\frac{r}{3}\right)$$

दिया है,

$$\frac{p}{3} = 2 \Rightarrow p = 6$$

$$\frac{q}{3} = -1 \Rightarrow q = -3$$

$$\frac{r}{3} = 3 \Rightarrow r = 9$$

समतल के समीकरण से,

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x-6y+2z}{18} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 3x-6y+2z = 18$$

उत्तर

प्रश्न 29. यदि $y = \log(\sec x + \tan x)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है– $y = \log(\sec x + \tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{(\sec x + \tan x)} \cdot \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{(\sec x + \tan x)} \cdot (\sec \tan x + \sec^2 x)$$

$$= \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}$$

$$= \sec x$$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—यदि $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 29 (अथवा) का हल।

प्रश्न 30. निम्न सारणी से माध्यिका (Median) ज्ञात कीजिए—

वर्ग	**0–10**	**10–20**	**20–30**	**30–40**	**40–50**	**50–60**	**60–70**
आवृत्ति	**5**	**8**	**18**	**23**	**27**	**12**	**7**

हल : दिये हुए आँकड़ों की संचयी बारम्बारता सारणी निम्नलिखित है—

वर्ग	**बारम्बारता (आवृत्ति)**	**संचयी बारम्बारता**
0–10	5	5
10–20	8	13
20–30	18	31
30–40	23	54
40–50	27	81
50–60	12	93
60–70	7	100

यहाँ $N = 100$

$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ जो संचयी बारम्बारता 54 के अन्तर्गत है। यह 30–40 वर्ग में है।

माध्यिका $m_d = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$

जहाँ, $L_1 = 30$

$L_2 = 40$

$f = 23$

$\frac{N}{2} = 50$

$C = 31$

सूत्र में मान रखने पर $m_d = 30 + \frac{40-30}{23}(50-31)$

$m_d = 30 + \frac{10}{23} \times 19$

$m_x = 30 + \frac{190}{23}$

$m_d = 30 + 8{\cdot}26$

$m_d = 38{\cdot}26$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—निम्न सारणी से बहुलक (Mode) ज्ञात कीजिए—

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृत्ति	5	12	20	9	4

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 30 (अथवा) का हल।

प्रश्न 31. निम्न सारणी से मानक विचलन ज्ञात कीजिए—

वर्ग	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20
आवृत्ति	4	6	8	5	2

हल :

वर्ग अन्तराल	मध्य मूल्य x	आवृत्ति f	$f \times x$	$d = x - M$	d^2	fd^2
0–4	2	4	8	– 7·2	51·84	207·36
4–8	6	6	36	– 3·2	10·24	61·44
8–12	10	8	80	0·8	0·64	5·12
12–16	14	5	70	4·8	23·04	115·2
16–20	18	2	26	8·8	77·44	154·88
		$\Sigma f = 25$	$\Sigma fx = 230$			$\Sigma fd^2 = 544$

समान्तर माध्य $M = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{230}{25}$

$M = 9{\cdot}2$

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\Sigma fd^2}{\Sigma f}}$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{544}{25}}$

$\sigma = 4{\cdot}66$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—ताश की एक गड्डी में से 2 पत्ते यदृच्छया (At random) निकाले जाते हैं तो एक बेगम और एक बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $n(S) = 5$

तथा गड्डी में गुलाम 4, बेगम 4 तथा बादशाह 4

कुल $= 4 + 4 + 4 = 12$

अर्थात् गुलाम, बेगम या बादशाह निकालने की घटना

यदि A हो तो $n(A) = 12$

अत:, अभीष्ट प्रायिकता $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$ **उत्तर**

प्रश्न 32. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो A^{-1} का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है— $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = 2(8-7) - 3(6-7) + 3(3-4)$

$\Rightarrow$ $|A| = 2 \times 1 - 3 \times (-1) + 3 \times (-1)$

$\Rightarrow$ $|A| = 2 + 3 - 3$

$|A| = 2 \neq 0$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (8-7) = 1$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(6-3) = -3$

$A_{13} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 21-12 = 9$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -(6-7) = 1$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-3=1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -(14-9) = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (3-4) = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8-9 = -1$$

$$\text{adj A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{adj A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj A}}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—समीकरण हल कीजिए (क्रेमर के नियम से)

$$\mathbf{6x + y - 3z = 5}$$
$$\mathbf{x + 3y - 2z = 5}$$
$$\mathbf{2x + y + 4z = 8}$$

हल : दिया गया समीकरण

$$6x + y - 3z = 5$$
$$x + 3y - 2z = 5$$
$$2x + y + 4z = 8$$

जहाँ,

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D &= 6\,(12 + 2) + 1\,(-4 - 4) + (-3)\,(1 - 6) \\ &= 6 \times 14 + 1\,(-8) - 3\,(-5) \\ &= 84 - 8 + 15 \\ &= 91 \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 5\,(12 + 2) + 1\,(-16 - 20) + (-3)\,(5 - 24) \\ &= 5 \times 14 + 1\,(-36) + (-3)\,(-19) \\ &= 70 - 36 + 57 \\ &= 91 \end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= 6\,(20 + 16) + 5\,(-4 - 4) + (-3)\,(8 - 10) \\ &= 6\,(36) + 5\,(-8) + (-3)\,(-2) \\ &= 216 - 40 + 6 \\ &= 182 \end{aligned}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= 6\,(24 - 5) + 1\,(10 - 8) + 5\,(1 - 6) \\ &= 6 \times 19 + 2 + 5\,(-5) \\ &= 114 + 2 - 25 \\ &= 91 \end{aligned}$$

क्रेमर के नियम से,

$$\frac{x}{D_1} = \frac{y}{D_2} = \frac{z}{D_3} = \frac{1}{D}$$

$$\frac{x}{91} = \frac{y}{182} = \frac{2}{91} = \frac{1}{91}$$

$$x = \frac{91}{69} = 1$$

$$y = \frac{182}{91} = 2$$

$$z = \frac{91}{91} = 1$$

अतः $x = 1, y = 2, z = 1.$ **उत्तर**

प्रश्न 33. यदि किसी त्रिभुज ABC में, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$ हो तो cos A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 34 का हल।

अथवा

प्रश्न—"द्ध कीजिए कि—

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right).$$

हल : L.H.S. $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right)$

$$=\sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}+\frac{8}{17}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right]$$

$$=\sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{64}{289}}+\frac{8}{17}\sqrt{1-\frac{9}{25}}\right]$$

$$=\sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\sqrt{\frac{225}{289}}+\frac{8}{17}\sqrt{\frac{16}{25}}\right]=\sin^{-1}\left[\frac{3}{5}\times\frac{15}{17}+\frac{8}{17}\times\frac{4}{5}\right]$$

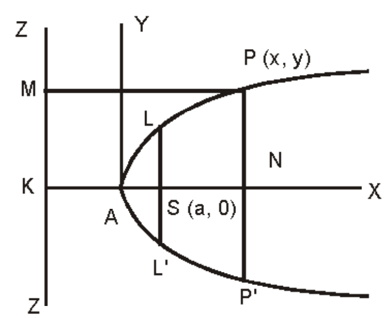
$$=\sin^{-1}\left[\frac{9}{17}+\frac{32}{85}\right]=\sin^{-1}\left[\frac{45+32}{85}\right]$$

$$=\sin^{-1}\frac{77}{85}$$

= R.H.S. **उत्तर**

प्रश्न 34. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि मूल बिन्दु (0, 0) है तथा नियता का समीकरण $2x + y - 1 = 0$ है।

हल : माना नाभि S (0, 0) है तथा ZZ′ नियता है। माना परवलय पर कोई बिन्दु P (x, y) है। माना PM नियता पर लम्ब है।



$\therefore$ परिभाषा से, SP = PM

$\Rightarrow$ $SP^2 = PM^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = \left\{\frac{2x+y-1}{(\sqrt{2^2+1})}\right\}^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = \frac{4x^2+y^2+1+4xy-2y-4x}{5}$

$\Rightarrow$ $5x^2 + 5y^2 = 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 2y - 4x$

$\Rightarrow \quad 5x^2 + 5y^2 - 4x^2 - y^2 - 1 - 4xy + 2y + 4x = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 - 4xy + 2y + 4x - 1 = 0$

यही परवलय का वांछित समीकरण है। **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ की उत्केन्द्रता, नाभियों के निर्देशांक और अक्षों की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर—छात्र देखें सेट-I वर्ष 2012 (दिसम्बर) का प्रश्न क्रमांक 35 (अथवा) का हल।

प्रश्न 35. गणितीय आगमन "द्धान्त से, "द्ध कीजिए कि n के सभी घन पूर्णांक मानों के लिए—

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 32 (अथवा) का हल।

अथवा

प्रश्न—$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{11}$ के प्रसार में x^7 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि $(r + 1)$वें पद में x^7 आता है,

तब $T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r} . \left(\frac{1}{x}\right)^r$

$= {}^{11}C_r . x^{22-2r} . \frac{1}{x^r}$

$= {}^{11}C_r . x^{22-3r}$

$\because \quad T_{r+1}$ में x^7 आता है

$\therefore \quad 22 - 3r = 7$

$\Rightarrow \quad 3r = 22 - 7 = 15$

$r = 5$

अत: x^7 का गुणांक $= {}^{11}C_5$

$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$

$= 462$ **उत्तर**

प्रश्न 36. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्बवत् हैं तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$

तथा $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$ हैं।

यहाँ $a_1 = -3, b_1 = 2k, c_1 = 2a_2 = 3k, b_2 = 1, c_2 = -5$

यदि दी हुई रेखाएँ लम्बवत् हैं तो

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -3 \times 3k + 2k \times 1 \times 2 \times (-5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -9k + 2k - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -7k - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad k = -\frac{10}{7}$$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—गोले $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 12y + 6z + 2 = 0$ का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का दिया गया समीकरण है—

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 12y + 6z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + \frac{2}{3} = 0$$

यहाँ
$$g = -1$$
$$f = -2$$
$$h = 1$$
$$c = \frac{2}{3}$$

केन्द्र $= (-g, -f, -h)$
$= [-(-1), -(-2), -1]$
$= (1, 2, -1)$

त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 + h^2 - c}$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (1)^2 - \frac{2}{3}} = \sqrt{1 + 4 + 1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{6 - \frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{18-2}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$ **उत्तर**

प्रश्न 37. $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ **का** $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ **का सापेक्ष अवकलन कीजिए।**

हल : माना $y_1 = \sin\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ तथा

$$y_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

माना $\quad x = \tan\theta$

$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} x$

$$y_1 = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$$

$$y_1 = \sin^{-1}(\tan 2\theta)$$

$$y_1 = 2\theta$$

$$y_1 = 2\tan^{-1} x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = 2\frac{d}{dx}\tan^{-1} x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \qquad ...(1)$$

$$y_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$y_2 = \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$y_2 = 2\theta$$

$$y_2 = 2\tan^{-1} x$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 2\frac{d}{dx}\tan^{-1} x$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \qquad ...(2)$$

तो y_1 का y_2 के सापेक्ष अवकलन गुणांक

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{2}{1+x^2}}$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = 1$$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—यदि $y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + ...\infty}}}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + ...\infty}}}$$

$$y = \sqrt{\tan x + y}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$y^2 = \tan x + y$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx}(2y-1) = \sec^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{2y-1}$$

प्रश्न 38. मान ज्ञात कीजिए—

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{\tan x + \cot x} dx.$$

हल :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{\tan x + \cot x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x \sin x}{1} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} - 0 + \frac{\sin \theta}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

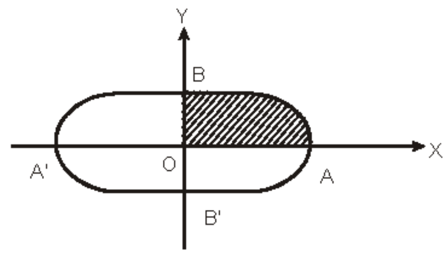
उत्तर

अथवा

प्रश्न—दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है।



अत: दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्रफल का चार गुना है अर्थात् दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल = 4 × (OAB) का क्षेत्रफल, प्रथम चतुर्थांश में।

$$\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}$$

या $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

अब क्षेत्रफल (OAB) के लिए x, 0 से a तक परिवर्तित होता है।

$\therefore$ (OAB) का क्षेत्रफल $= \int_0^a y\,dx$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1-0-\frac{a^2}{2}\sin^{-1}0\right]$$

$$= \frac{ab\pi}{4}$$

दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल $= 4\times\frac{ab\pi}{4}$

$= ab\pi$ वर्ग इकाई **उत्तर**

❑

छत्तीसगढ़ राज्य ओपन स्कूल परीक्षा

सॉल्वड पेपर—मई-जून, 2011

कक्षा 12वीं

विषय : गणित

सेट—4

समय : 3 घण्टे] **[पूर्णांक : 100**

निर्देश—(1) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है। (2) प्रश्न क्रमांक 1 से 22 तक पर 1 अंक निर्धारित है। (3) प्रश्न क्रमांक 23 से 31 तक पर 4 अंक निर्धारित हैं। (4) प्रश्न क्रमांक 32 से 38 तक पर 6 अंक निर्धारित हैं। (5) प्रश्न क्रमांक 23 से 38 तक के प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प दिया गया है।

सही विकल्प का चयन कीजिए—

1. यदि $z = 3 + 2i$ और $\bar{z} = 3 - 2i$ है तब $z.\bar{z}$ = का मान है—

(a) 13 (b) 5 (c) 6 (d) $4i$.

उत्तर—(a) 13.

2. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तिकर (Discriminant) है—

(a) $D = b^2 + ac$ (b) $D = b^2 - 4ac$

(c) $D = \frac{b^2}{ac}$ (d) $D = ab^2 c$.

उत्तर—(b) $D = b^2 - 4ac$.

3. 8, 6, 4, ... का कौन-सा पद शून्य है ?

(a) – 5 (b) – 3

(c) 5 (d) 3.

उत्तर—(c) 5.

4. प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल है—

(a) $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ (b) $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

(c) $n(n+1)(2n+1)$ (d) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

उत्तर—(d) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. **सारणिक $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ का मान है—**

(a) 20 (b) 44 (c) – 12 (d) 4.

उत्तर—(a) 20.

6. **फलन $f(x) = 3x + 10$ का प्रान्त $x \varepsilon 7$ है, तब परिसर का मान है—**

(a) 7 (b) (7, 31) (c) 31 (d) (31, 7)

उत्तर—(c) 31.

7. **यदि $\sin\theta + \cos\theta = 1$ है, तब $\sin\theta \cos\theta$ का मान है—**

(a) ∞ (b) 1 (c) 2 (d) 0.

उत्तर—(d) 0.

8. **यदि $A = \frac{\pi}{3}$ और $B = \frac{\pi}{6}$ है तब $\cot(A + B)$ का मूल्य है—**

(a) ∞ (b) $\sqrt{3}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

उत्तर—(c) 0.

9. **यदि $\tan 60^o = \sqrt{3}$ और $\tan 45^o = 1$ है तब $\tan 105^o$ का मान है—**

(a) $(2 - \sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3} - 2)$ (c) $-(2 + \sqrt{3})$ (d) $(2 + \sqrt{3})$.

उत्तर—(c) $-(2 + \sqrt{3})$.

10. **$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान है—**

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$.

उत्तर—(c) $\frac{\pi}{6}$.

रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए—

11. **गणितज्ञ आर्थर कैले ने .... की खोज की है।**

उत्तर—आव्यूह।

12. **गणितज्ञ .... को समुच्चय सिद्धान्त के जनक के रूप में जाना जाता है।**

उत्तर—जार्ज कैन्टर।

13. **$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ का मान .... है।**

उत्तर—4.

14. log tan x का अवकलन मान .... है।

उत्तर–cosec x. sec x.

15. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ का क्षेत्रफल .... है।

उत्तर– $\frac{\pi a^2}{4}$.

16. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = \tan x$ का घात .... है।

उत्तर–1.

17. किसी श्रेणी का समान्तर माध्य .... तथा माध्यिका 15 है, तब बहुलक का मान 9 होता है।

उत्तर–18.

निर्देशानुसार उत्तर दीजिए–

प्रश्न 18. समान सदिश और समदिश सदिश में एक अन्तर स्पष्ट कीजिए।

उत्तर–समान सदिश का परिमाण समान होते हैं जबकि समदिश सदिश का परिमाण समान नहीं होते।

प्रश्न 19. गोले का समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2fy + 2hz + c = 0$ हो तो, त्रिज्या का मान बताइये।

हल : गोले का समीकरण–

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2fy + 2hz + d = 0 \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + 2gx) + (y^2 + 2fy) + (z^2 + 2hz) = -d$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) + (z^2 + 2hz + h^2) = g^2 + f^2 + h^2 - d.$$

$$\Rightarrow \quad (x + g)^2 + (y + f)^2 + (z + h)^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 + h^2 - d^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad [x - (-g)]^2 + [y - (-f)]^2 + [z - (-h)]^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 + h^2 - d}\right)^2$$

अत: गोले का समीकरण–

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \alpha^2$ से तुलना करने पर केन्द्र $(-g, -f, -h)$

$$\therefore \quad \text{त्रिज्या} = \sqrt{g^2 + f^2 + h^2 - d}.$$

प्रश्न 20. $\int \cot x\, dx$ का मान बताइये।

हल : $$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$= \quad dx$

$= \log \sin x$ **उत्तर**

प्रश्न 21. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$ **किस मान के बराबर है ?**

हल : $= \int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{1/3}\, dx$

$= \dfrac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C$

$= \dfrac{4}{3} x^{4/3} + C$ **उत्तर**

प्रश्न 22. अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकालना यादृच्छिक प्रयोग क्यों है ?

हल : अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से हुकुम, पान, चिड़ी, ईंट इसमें से कोई एक पत्ता ही निकलेगा परन्तु कौन-सा पत्ता आयेगा ये निश्चित नहीं होता है। अत: एक और केवल एक परिणाम का एकल परिणाम में आना निश्चित हो लेकिन परिणाम का सही पूर्वानुमान न हो, अत: ताश का एक पत्ता निकालना एक यादृच्छिक प्रयोग है।

प्रश्न 23. $3 - 4i$ का गुणन प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल : माना $z = 3 - 4i$

$\bar{z} = 3 + 4i$

तथा $|z| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

$|z| = \sqrt{9 + 16}$

$|z| = \sqrt{25}$

$|z|^2 = 25$

गुणन प्रतिलोम $= \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{3 + 4i}{25}$

$= \dfrac{1}{25}(3 + 4i)$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—शब्द MONDAY के अक्षरों से कितने शब्द बनेगा, यदि 4 अक्षर एक साथ प्रयोग किए जाते हैं ?

हल : शब्द MONDAY में कुल अक्षरों की संख्या = 6

4 अक्षर एक साथ प्रयोग किये जाते हैं तो 6 अक्षरों से 4 चुनने के तरीके = $^6P_4$

= =

=

$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

अत: अभीष्ट क्रमचयों की संख्या = 360 **उत्तर**

प्रश्न 24. किसी समान्तर श्रेणी का 5 वाँ पद $\frac{1}{3}$ और तीसरा पद $\frac{1}{5}$ है तो श्रेणी का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : माना समान्तर श्रेणी का प्रथम पद $= a$

एवं पदान्तर $= d$

प्रश्नानुसार, $a + (5 - 1)\, d = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad a + 4d = \frac{1}{3}$ ...(1)

इसी प्रकार, $a + (3 - 1)\, d = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad a + 2d = \frac{1}{5}$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर

$\Rightarrow \quad a + 4d - (a + 2d) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad a + 4d - a - 2d = \frac{5 - 3}{3 \times 5}$

$\Rightarrow \quad 2d = \frac{2}{15}$

$\therefore \quad d = \frac{1}{15}$

समीकरण (1) में d का मान रखने पर

$\Rightarrow \quad a + 4d = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad a + 4 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad a + \frac{4}{15} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{3} - \frac{4}{15}$

$\Rightarrow \quad a = \frac{5-4}{15}$

$\therefore \quad a = \frac{1}{15}$

अत: श्रेणी का 15 वाँ पद $= a + (15-1)\,d$

$= a + 14\,d$

$= \frac{1}{15} + 14 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{15} + \frac{14}{15}$

$= 1.$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—श्रेणी 2·3 + 4·5 + 6·7 + ... के *n* पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $S_n = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots$ n पदों तक।

श्रेणी का n वाँ पद

$T_n =$ (2, 4, 6, ... का n वाँ पद) × (3, 5, 7, ... का n वाँ पद)

$T_n = [2 + (n-1)\,2]\,[3 + (n-1)\,2]$ ∵ A.P. का $T_n = a + (n-1)\,d$]

$T_n = [2 + 2n - 2]\,[3 + 2n - 2]$

$T_n = [2n]\,[2n + 1]$

$\Rightarrow \quad T_n = 4n^2 + 2n$

$\therefore \quad S_n = \Sigma T_n$

$= \Sigma\,(4n^2 + 2n)$

$= 4\,\Sigma n^2 + 2\,\Sigma n$

$= 4\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\,\frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} + n\,(n+1)$

$= n\,(n+1)\left[\frac{2(2n+1)}{3} + 1\right] = n\,(n+1)\left[\frac{4n+2+3}{3}\right]$

$= \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}$

अत: श्रेणी का योगफल $= \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 25. तुल्य समुच्चय और सम समुच्चय में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

हल : तुल्य समुच्चय और सम समुच्चय में अन्तर अग्रलिखित है—

क्र.	तुल्य समुच्चय	सम समुच्चय
1.	अवयवों का क्रम समान हो तथा अवयव का क्रम अलग-अलग हो।	कहते हैं। अवयवों का क्रम अलग हो पर अवयव एक ही होते हैं।
2.	इसे A = B से व्यक्त करते हैं।	इसे एक संगतता अर्थात् ↕ ↕ से व्यक्त करते हैं।
3.	दो समुच्चयों में यदि और केवल यदि एक समुच्चय का प्रत्येक अवयव दूसरे समुच्चय का अवयव हो और दूसरे समुच्चय का प्रत्येक अवयव पहले समुच्चय का अवयव हो, तो दोनों समुच्चय को सम समुच्चय	यदि दो समुच्चयों में एक-एक संगतता स्था"त की जा सके तो दोनों समुच्चय को तुल्य समुच्चय कहते हैं।

अथवा

प्रश्न—यदि $\cos\theta = \frac{4}{5}$ दिया गया हो, तो $\sec\theta + \tan\theta$ को हल कीजिए।

हल : दिया है—
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

∴
$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}}$$
$$= \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$= \frac{3}{5}$$

अत:
$$\sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

मान रखने पर
$$= \frac{1+\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{(5+3)}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{8}{4}$$

$= 2$

अत: $\sec\theta + \tan\theta = 2$ **उत्तर**

प्रश्न 26. यदि $a = 2, b = 3$ और $c = 5$ हो, तो कोण β का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र : $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \dfrac{(5)^2 + (2)^2 - (3)^2}{2 \times 5 \times 2}$

$= \dfrac{25 + 4 - 9}{20} = \dfrac{20}{20}$

$\cos B = 1$

$\therefore \quad \cos B = \cos 0^\circ$

$\Rightarrow \quad B = 0^\circ$. **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\cos 7\theta + \cos 9\theta}{\sin 9\theta + \sin 7\theta} = \frac{1}{\tan 8\theta}$$

हल : L.H.S. $= \dfrac{\cos 7\theta + \cos 9\theta}{\sin 9\theta + \sin 7\theta}$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{7\theta+9\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{7\theta-9\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{9\theta+7\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{9\theta-7\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{16\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{-2\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{16\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\theta}{2}\right)} = \frac{\cos 8\theta \cdot \cos(-\theta)}{\sin 8\theta \cdot \cos\theta}$$

$$= \frac{\cos 8\theta \cdot \cos\theta}{\sin 8\theta \cdot \cos\theta} = \cot 8\theta$$

$= \dfrac{1}{\tan 8\theta}$ = R.H.S. **यह सिद्ध हुआ।**

प्रश्न 27. वृत्त $3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ के केन्द्र तथा त्रिज्या को ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का समीकरण है—

$3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$

$x^2 + y^2 - \dfrac{5}{3}x - 2y + \dfrac{4}{3} = 0$ ...(1)

इसका व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad 2g = -\frac{5}{3} \Rightarrow g = \frac{-5}{6}$

$\Rightarrow \quad 2f = -2 \Rightarrow f = -1$

तथा $\quad c = \frac{4}{3}$

अतः वृत्त का केन्द्र $(-g, -f)$ अर्थात् $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$ है

एवं $\quad$ त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1^2 - \left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{36} + 1 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{25 + 36 - 48}{36}}$$

$$= \sqrt{\frac{61 - 48}{36}} = \sqrt{\frac{13}{36}}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$\therefore$ वृत्त का केन्द्र $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$ तथा त्रिज्या $\frac{1}{6}\sqrt{13}$ है। **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—एक दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी नाभि (3, 4), उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$ तथा संगत नियता $3x + 4y = 5$ है।

हल : माना दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु P (x, y) है।

$\therefore \quad$ नाभि से दूरी $= e \times$ इसकी नियता से दूरी

$$PS = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$$

P (x, y) परवलय पर कोई बिन्दु है जो नियता $3x + 4y = 5$ पर लम्ब है।

$$PM = \frac{3x + 4y - 5}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}}$$

$$PM = \frac{3x + 4y - 5}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{3x + 4y - 5}{\sqrt{25}}$$

$$PM = \frac{3x + 4y - 5}{5}$$

$\therefore \quad$ दीर्घवृत्त की परिभाषा से,

$$PS = ePM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3x+4y-5}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = \frac{4}{9}\left[\frac{9x^2 + 16y^2 + 24xy + 25 - 30x - 40y}{25}\right]$$

$$\Rightarrow (225-36)x^2 + (225-64)y^2 - 96\,xy - (6 \times 225 - 120)\,x - (225 \times 8 - 160)\,y + (25 \times 225 - 100) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 189\,x^2 + 161\,y^2 - 96\,xy - 1230\,x - 1640\,y + 5525 = 0$$ **उत्तर**

प्रश्न 28. सिद्ध कीजिए कि समतल

$x + y + z = 0$, गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 2 = 0$ को स्पष्ट करता है।

हल : गोले का समीकरण है—

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 2 = 0 \quad ...(i)$$

यहाँ $u = -2, v = -3, w = -1$ और $d = 2$.

$\therefore$ गोले का केन्द्र $(-u, -v, -w)$ अर्थात् $(2, 3, 1)$ है।

गोले की त्रिज्या $r = \sqrt{u^2+v^2+w^2-d} = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-1)^2-2}$

$$= \sqrt{4+9+1-2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{2}$$

यदि दिया हुआ समतल $x + y + z = 0$ ...(ii)

गोले को स्पर्श करता है तो गोले के केन्द्र (2, 3, 1) से उपर्युक्त समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई गोले की त्रिज्या के बराबर होगी।

अब केन्द्र (2, 3, 1) से समतल (i) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{2+3+1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

= गोले की त्रिज्या

अत: दिया हुआ समतल दिये हुए गोले को स्पर्श करता है। **सिद्ध हुआ।**

अथवा

प्रश्न—रेखाओं $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$ और $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : रेखाओं के समीकरण हैं—

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

जहाँ,

$a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = -1$

$a_2 = 3$, $b_2 = 4$, $c_2 = 5$

सूत्र :
$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

मान रखने पर

$$\cos\theta = \frac{1 \times 3 + 0 \times 4 + (-1) \times 5}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2}\ \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (5)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{3 + 0 - 5}{\sqrt{1 + 0 + 1}\ \sqrt{9 + 16 + 25}}$$

$$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{2}\ \sqrt{50}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}\ \left(\sqrt{2 \times 25}\right)} = \frac{-2}{2 \times 5}$$

$$\cos\theta = \frac{-2}{10}$$

$\Rightarrow$ $$\cos\theta = -\frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$ $$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)$$ **उत्तर**

प्रश्न 29. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$ **को हल कीजिए।**

हल : $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{2x-1}{x+1}$$

$$= \frac{2\times1-1}{1+1} = \frac{2-1}{2}$$

$= 1/2$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—फलन $2x^2 - x + 3$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हल : फलन $y = f'(x)$

$$y = 2x^2 - x + 3$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$= 4x - 1$$

उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के लिये,

$$f'(x) = 0$$

$$4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x = 1$$

$$\therefore \quad x = 1/4$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 4 > 0$$

$x = 1/4$ पर निम्निष्ठ है।

निम्निष्ठ मान $x = 1/4$ पर होगा।

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3$$

$$= 2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{2}{8} - \frac{1}{4} + 3$$

$$= -\frac{1}{8} + 3 = -\frac{1+24}{8}$$

$$= \frac{23}{8}$$

अत: निम्निष्ठ मान $= \frac{23}{8}$ **उत्तर**

प्रश्न 30. प्रतिदर्श समष्टि के प्रकारों को लिखते हुए समझाइये।

हल : प्रतिदर्श समष्टि के 4 प्रकार होते हैं—

1. परिमित प्रतिदर्श समष्टि (Finite Sample Space)—यदि प्रतिदर्श समष्टि में बिन्दुओं की संख्या परिमित हो तो वह परिमित प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

उदाहरणार्थ—एक सिक्के की उछाल में दो ही प्रतिदर्श बिन्दु होते हैं। एक पासे की फेंक में केवल 6 प्रतिदर्श बिन्दु होते हैं तथा ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने पर प्रतिदर्श बिन्दु 52 होते हैं। ये सभी परिमित प्रतिदर्श समष्टि हैं।

2. अपरिमित प्रतिदर्श समष्टि (Non-finite Sample Space)—यदि प्रतिदर्श समष्टि में प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या अपरिमित हो तो उसे अपरिमित प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं।

उदाहरणार्थ—(i) वायुमण्डल में उपस्थित ऑक्सीजन गैस के अणु अपरिमित हैं तथा बाँध में पानी की बूँदें अपरिमित होती हैं।

(ii) किसी पौध नर्सरी जहाँ पौधों की संख्या सीमित हो सकती है, फिर भी वह अपरिमित प्रतिदर्श समष्टि होता है।

किसी पासे को अनन्त बार फेंका जाय जब तक कि वह घिस न जाय यह भी अपरिमित प्रतिदर्श समष्टि बनाता है।

3. संतत प्रतिदर्श समष्टि (Continuous Sample Space)—यदि यादृच्छिक चर दिये गये अन्तराल में प्रत्येक मान ग्रहण कर सके तथा उसमें से किसी मान पर विचार किया जाय तो वह संतत प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

किसी बर्तन में गैस के अणुओं का वेग संतत प्रतिदर्श समष्टि होता है जो न्यूनतम व अधिकतम वेग के मध्य कोई भी मान ग्रहण कर सकता है।

4. विविक्त प्रतिदर्श समष्टि (Discrete Sample Space)—यदि यादृच्छिक चर केवल पूर्णांक मान ग्रहण करे तो उसके मानों को विविक्त प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं।

उदाहरणार्थ—चार पासों की उछाल में सभी पासों पर समान संख्या आने को दर्शाने वाले बिन्दु विविक्त समष्टि को दर्शाते हैं।

विविक्त प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या परिमित या अपरिमित (गणनीय) हो सकती है जिन्हें धन पूर्णांकों के संगत क्रमानुसार लिखा जा सकता है।

उदाहरणार्थ—(i) एक पासे तथा एक सिक्के को साथ-साथ उछालने से प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि में 12 प्रतिदर्श बिन्दु हैं।

S = {(1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (3, H), (3, T), (4, H), (4, T), (5, H),

(5, T), (6, H), (6, T)}

अथवा

प्रश्न—निम्नलिखित सारणी का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्गान्तर	**0–5**	**5–10**	**10–15**	**15–20**	**20–25**
आवृत्ति	**8**	**16**	**25**	**14**	**7**

हल :

वर्ग अन्तराल	**माध्य मूल्य (x)**	**आवृत्ति (f)**	**$d = x - 12{\cdot}5$**	**fd**	**fd^2**
0–5	2·5	8	– 10	– 16 × 5 = – 80	800
5–10	7·5	16	– 5	– 16 × 5 = – 80	400
10–15	12·5	25	0	0	0
15–20	17·5	14	+ 5	14 × 5 = 70	350
20–25	22·5	7	+ 10	14 × 5 = 70	700
		$\Sigma f = 70$		$\Sigma fd = -20$	$\Sigma fd^2 = 2250$

जहाँ, $\Sigma fd = -20$

$\Sigma fd^2 = 2250$

$\Sigma f = 70$

सूत्र : मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{2250}{70}} - \left(\frac{-4\times5}{70}\right)^2$

$$\sigma = \sqrt{\left[\frac{9}{7}-\left(-\frac{2}{35}\right)^2\right]25}$$

$$\sigma = \sqrt{32{\cdot}05}$$

$$\sigma = 5{\cdot}66$$ **उत्तर**

प्रश्न 31. यदि वर्षा होने की प्रायिकता 0·3 है तो वर्षा के अनुकूल और प्रतिकूल संयोगात्मक ज्ञात कीजिए।

हल : मानलो A घटना है कि वर्षा होगी।

$$P(A) = 0{\cdot}3$$

अत: नियमानुसार, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{\cdot}3$$

$$P(\overline{A}) = 0{\cdot}7$$

वर्षा का अनुकूल संयोगानुपात = $\frac{0{\cdot}3}{0{\cdot}7}$ या = 3·7 **उत्तर**

वर्षा का प्रतिकूल संयोगानुपात = $\frac{0{\cdot}7}{0{\cdot}3}$ या = 7·3 **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—कक्षा बारहवीं के विद्यार्थियों के गणित में प्राप्तांक निम्नानुसार हैं तो माध्यिका ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	**11**	**13**	**16**	**22**	**25**	**28**
आवृत्ति	**2**	**5**	**9**	**13**	**8**	**4**

हल :

प्राप्तांक	**आवृत्ति**	**संचयी आवृत्ति**
11	2	2
13	5	7
16	9	16
22	13	29
25	8	37
28	4	41

यहाँ $N = 41$

माध्यिका = $\frac{N+1}{2}$

$$= \frac{41+1}{2} = \frac{42}{2}$$

$$= 21$$

यह 21 संचयी बारम्बारता 29 के अन्तर्गत आता है।

अत: अभीष्ट माध्यिका = 29 संचयी बारम्बारता के सामने वाला आकार = 22 **उत्तर**

प्रश्न 32. $(x + 2)^4$ का प्रसार कीजिए।

हल : दिया है– द्विपद $(x + 2)^4$

$\because$ द्विपद प्रमेय से, $(x + a)^n = {}^nC_0 \cdot x^n + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n \cdot a^n$

यहाँ पर $x = x, a = 2, n = 4$

$$\therefore \quad (x+2)^4 = x^4 + {}^4C_1 x^{4-1} \cdot 2 + {}^4C_2 x^{4-2} \cdot 2^2 + {}^4C_3\, x^{4-3} \cdot 2^3 + {}^4C_4 \cdot x^{4-4} \cdot 2^4$$

$$= x^4 + \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \cdot x^3 \cdot 2 + \frac{4!}{2!\,(4-2)!} x^2 \cdot 2^2 + \frac{4!}{3!\,(4-3)!} \cdot x \cdot 2^3 + \frac{4!}{4!\,(4-4)!} \cdot x^0 \cdot 2^4$$

$$= x^4 + \frac{4!}{3!1!} \cdot x^3 \cdot 2 + \frac{4!}{2!2!} x^2 \cdot 2^2 + \frac{4!}{3!1!} x \cdot 2^3 + \frac{4!}{4!(0)!} x^0 \cdot 2^4$$

$$= x^4 + \frac{4 \cdot 3!}{3!} \cdot x^3 \cdot 2 + \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} x^2 \cdot 2^2 + \frac{4 \cdot 3!}{3! \cdot 1} x \cdot 2^3 + \frac{1}{1} x^0 \cdot 2^4$$

$$= x^4 + 8x^3 + 6 \times x^2 \times 4 + 4x \cdot 8 + 1 \cdot 16$$

$$= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—यदि द्विघात समीकरण $3x^2 - 5x + 9 = 0$ का मूल α, β हो तो $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : द्विघात समीकरण है–

$$3x^2 - 5x + 9 = 0$$

यहाँ $a = 3$

$b = -5$

$c = 9$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9}{3} = 3$$

$\Rightarrow$ $$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (5/3)^2 - 2 \times 3 = -\frac{29}{9}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\frac{-29}{9}}{(3)^2} = \frac{-29}{81}$$ **उत्तर**

प्रश्न 33. सिद्ध कीजिए।

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \end{vmatrix} = \mathbf{(a - b)\,(b - c)\,(c - a)}$$

हल : माना $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ a-b & b-c & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \left[\begin{array}{l}\text{संक्रिया } C_1 \to C_1 \to C_2 \\ \text{तथा } C_2 \to C_2 \to C_3 \text{ से}\end{array}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ (a-b)(a+b) & (b-c)(b+c) & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\,(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

[C_1 से $a - b$ तथा C_2 से $b - c$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (a-b)\,(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix} \quad [R_1 \text{ के सापेक्ष विस्तार करने पर}]$$

$$= (a-b)\,(b-c)\,(b+c-a-b)$$

$$= (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$ **सिद्ध हुआ।**

अथवा

प्रश्न—यदि

A = **तथा B = [1, – 5, 7] हो, तो सिद्ध कीजिए (AB)′ = B′ A′.**

हल : A =

$$A' = [3 \ 1 - 2]$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

अत: $$AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 - 5 \ 7]$$

$$AB = [3 \times 1 - 1 \times 5 - 2 \times 7]$$

$$AB = [3 - 5 - 14]$$

$$AB = -16$$

$\therefore$ $$(AB)' = -16$$

$$B' A' = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} [3 \ 1 - 2]$$

$$B' A' = [1 \times 3 - 5 \times 1 - 7 \times 2]$$

$$= [3 - 5 - 14] = [3 - 19]$$

$$= -16$$

$\therefore$ $(AB)' = B' A'$ **इति सिद्धम्**

प्रश्न 34. सिद्ध कीजिए कि किसी अधिककोण त्रिभुज के कोणों की ज्याएँ सम्मुख भुजाओं के अनुक्रमानुपाती होती हैं।

हल : दिया है— ΔABC में,

$$BC = a,$$

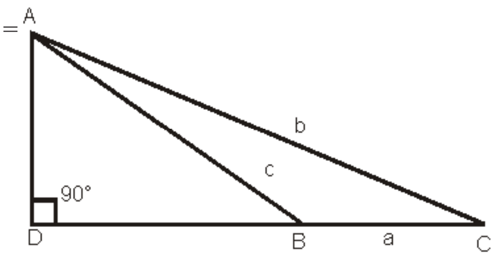
$$CA = b,$$

$$AB = c.$$

$\angle B$ = अधिक कोण

सिद्ध करना है— $\frac{\sin A}{a} \quad \frac{\sin B}{b} \quad \frac{\sin C}{c}$

=



रचना—$AD \perp BC$ खींचें एवं BC को D तक बढ़ाते हैं।

Δ ADC में,

$$\sin C = \frac{AD}{AC}$$

$\Rightarrow$ $AD = AC \sin C$

$\Rightarrow$ $AD = b \sin C$ ...(1)

Δ ADB में, $\sin B = \frac{AD}{AB}$

$\Rightarrow$ $AD = AB \sin B$

$\Rightarrow$ $AD = C \sin B$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से $AD = b \sin C = C \sin B$

$\Rightarrow$ $b \sin C = C \sin B$

$\Rightarrow$ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ...(3)

इसी प्रकार,

शीर्ष B से सम्मुख भुजा AC पर लम्ब डालकर यह सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad ...(4)$$

समीकरण (3) व (4) से

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$\therefore$ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ **यही सिद्ध करना था।**

अथवा

प्रश्न—$\mathbf{cosec^{-1}}$ (cosec $\frac{\pi}{4}$) को हल कीजिए।

हल : $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } \frac{\pi}{4})$

माना $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } \frac{\pi}{4}) = \theta$

$\Rightarrow$ $\text{cosec } \frac{\pi}{4} = \text{cosec } \theta$

$\Rightarrow \qquad \text{cosec}\,\theta = \text{cosec}\,\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$ **उत्तर**

प्रश्न 35. स्पष्ट कीजिए कि रेखाएँ

$3x - 4y = 12$ तथा $4x + 3y = 10$ समान्तर है या लम्बवत्।

हल : रेखाओं के समीकरण को $y = mx + c$ के रूप में लिखने पर,

$3x - 4y = 12$

$\Rightarrow \qquad -4y = 12 - 3x$

या $\qquad -4y = -3x + 12$

$\Rightarrow \qquad y = \frac{3}{4}x - \frac{12}{4}$

$\therefore \qquad m_1 = \frac{3}{4}$

तथा $\qquad 4x + 3y = 10$

$\Rightarrow \qquad 3y = -4x + 10$

$\Rightarrow \qquad y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$

$\therefore \qquad m_2 = -\frac{4}{3}$

चूँकि $m_1 \neq m_2$ स्पष्ट होता है कि रेखाएँ समान्तर नहीं हैं।

परन्तु $\qquad m_1 \times m_2 = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{3}\right)$

$m_1 \times m_2 = -1$

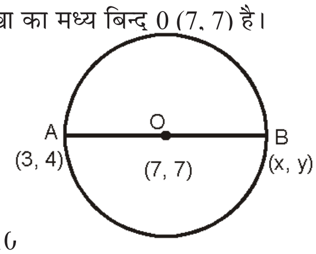
अत: रेखाएँ लम्बवत् हैं। **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—एक वृत्त के व्यास का एक सिरा (3, 4) और केन्द्र (7, 7) हो तो दूसरे सिरे का निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना वृत्त के व्यास के दूसरे सिरे के निर्देशांक B (x, y) हैं।

तब बिन्दु A (3, 4) व B (x, y) को मिलाने वाली रेखा का मध्य बिन्दु 0 (7, 7) है।



$\therefore \qquad 7 = \frac{3 + x}{2}$ और $7 = \frac{4 + y}{2}$

$\Rightarrow \qquad 3 + x = 7 \times 2 \Rightarrow 4 + y = 7 \times 2$

$\Rightarrow \qquad 3 + x = 14 \Rightarrow 4 + y = 14$

$\Rightarrow \qquad x = 14 - 3 \Rightarrow y = 14 - 4$

$\therefore \qquad x = 11 \qquad \therefore\ y = 10$

अत: अभीष्ट सिरे के निर्देशांक (11, 10) हैं। **उत्तर**

प्रश्न 36. सदिशों $i + 2j + k$ और $3i - 2j - k$ का अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है—

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k},$$
$$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

अदिश गुणनफल होगा—

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})(3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})$$
$$= 3 - 4 - 1$$
$$= 3 - 5$$
$$= -2$$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—समझाइये कि बिन्दु A (– 2, 4, – 3), B (4, – 3, – 2) और C (– 3, – 2, 4) समबाहु ΔABC के शीर्ष हैं।

हल : माना ΔABC समबाहु त्रिभुज है जिसके शीर्ष A (– 2, 4, – 3), B (4, – 3, – 2) C (– 3, – 2, 4) हैं।

$$\text{भुजा AB} = \sqrt{(-2-4)^2 + (4+3)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{36+49+1}$$
$$= \sqrt{86}$$
$$\text{भुजा BC} = \sqrt{(4+3)^2 + (-3+2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{49+1+36}$$
$$= \sqrt{86}$$
$$\text{भुजा AC} = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{1+36+49}$$
$$= \sqrt{86}$$

AB = BC = AC अत: ΔABC समबाहु है।

प्रश्न 37. हल कीजिए—

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x \cdot \operatorname{cosec} x}\, dx$$

हल : माना $$I = \int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x \cdot \operatorname{cosec} x}\, dx$$

$\Rightarrow$ $$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}}\, dx$$

$\Rightarrow$ $$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\frac{1}{\sin x}}\, dx$$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^\pi x \sin^2 x \, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^\pi (\pi - x) \sin^2 (\pi - x) \, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^\pi (\pi - x) \sin^2 x \, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \int_0^\pi x \sin^2 x \, dx$

$\Rightarrow \quad I = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx - I$

$\Rightarrow \quad I + I = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx$

$\Rightarrow \quad 2I = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2} \, dx - \frac{\pi}{2} \int \cos 2x \, dx$

$\Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi}{2} [x]_0^\pi - \frac{\pi}{4} [\sin 2x]_0^\pi$

$\Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi}{2} \times (\pi - 0) - \frac{\pi}{4} (\sin 2\pi - \sin 0)$

$\Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4} (0 - 0)$

$\Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi^2}{2} - 0$

$\Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi^2}{2}$

$\therefore \quad I = \frac{\pi^2}{4}$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + 3x^2$$ **को हल कीजिए।**

हल : अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + 3x^2$$

$$dy = (\sec^2 x + 3x^2) \, dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int dy = \int \sec^2 x \, dx + 3 \int x^2 \, dx$$

$$y = \tan x + \frac{3x^3}{3} + C$$

$$y = \tan x + x^3 + C$$ उत्तर

प्रश्न 38. यदि $y = (\sin x)^{\sin x^{\sin x ....\infty}}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$y = (\sin x)^{\sin x^{\sin x ....\infty}}$$

मानलो $y = (\sin x)^y$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log y = \log \sin x^y$$

$$\log y = y \log \sin x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx} \log \sin x + \log \sin x \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{y} - \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x + \log \sin x \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} - \log \sin x \frac{dy}{dx} = y \cdot \cot x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[\frac{1}{y} - \log \sin x\right] = y \cdot \cot x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[\frac{1 - y \cdot \log \sin x}{y}\right] = y \cdot \cot x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cot x}{1 - y \cdot \log \sin x}$$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ पर वे बिन्दु ज्ञात कीजिए, जिस पर स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समान्तर हैं।

हल : वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ...(1)

मानलो बिन्दु P (x, y) है।

∵ स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समान्तर है।

समीकरण (1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2 \times 1 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow x + y \cdot \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = 1 - x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$$

चूँकि स्पर्श रेखा, x-अक्ष के समान्तर है।

अत: स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य होगी।

अर्थात् $$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1-x}{y} = 0$$

या $$1 - x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

समीकरण (1) में $x = 1$ रखने पर

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1)^2 + y^2 - 2 \times 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + y^2 - 2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad (y)^2 = (2)^2$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 2$$

अत: अभीष्ट बिन्दु

$$P(x, y) = P(1, \pm 2)$$

अर्थात् $(1, 2)$ एवं $(1, -2)$ **उत्तर**

❑

छत्तीसगढ़ राज्य ओपन स्कूल परीक्षा

सॉल्वड पेपर—2010

कक्षा 12वीं

विषय : गणित

सेट—5

समय : 3 घण्टे] **[पूर्णांक : 100**

निर्देश—(1) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है। (2) आवश्यकतानुसार चित्र अंकित करें। (3) प्रश्न क्रमांक 1 से 22 तक एक अंक, प्रश्न क्रमांक 23 से 31 तक 4 अंक, प्रश्न 32 से 38 तक 6 अंकों के प्रश्न हैं।

1. i^{-20} का मान है—

(a) – 1 (b) + 1 (c) i (d) – i

उत्तर—(b) + 1.

2. $x^2 - 5x + 6 = 0$ के मूल हैं—

(a) 2, – 3 (b) – 2, 3 (c) – 2, – 3 (d) 2, 3

उत्तर—(d) 2, 3.

3. 2, 4, 6, 8, ... का 10वाँ पद होगा—

(a) 18 (b) 22 (c) 20 (d) 16

उत्तर—(c) 20.

4. $\sqrt{2}+1$ और $\sqrt{2}-1$ का समान्तर माध्य होगा—

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 0

उत्तर—(b) $\sqrt{2}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ का मान होगा—

(a) – 2 (b) 2 (c) 5 (d) – 5

उत्तर—(a) – 2.

6. यदि $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ हो, तो A′ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

7. यदि A = {1, 2, 3, 4, 5} तथा B = {1, 3, 5, 7} हो, तो $A \cap B$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है–

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

तथा $B = (1, 3, 5, 7)$

तब $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ **उत्तर**

10. 10^o को रेडियन में बदलिए।

हल : $180^o = \pi$ रेडियन

$1^o = \frac{\pi}{180^o}$ रेडियन

$10^o = \frac{\pi}{180^o} \times 10^o = \frac{\pi}{18}$ रेडियन

9. $\tan\frac{\pi}{3} \tan\frac{\pi}{6}$ का मान होगा–

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) 3 (d) 1

उत्तर–(d) 1.

10. सम समुच्चय किसे कहते हैं ?

उत्तर–दो समुच्चयों में यदि और केवल यदि एक समुच्चय का प्रत्येक अवयव दूसरे समुच्चय का (सदस्य) अवयव है और दूसरे समुच्चय का प्रत्येक अवयव पहले समुच्चय का अवयव हो तो दोनों समुच्चय को सम समुच्चय कहते हैं।

उदाहरण– A = [सोमवार, मंगलवार, गुरुवार]

B = [मंगलवार, गुरुवार, सोमवार]

समुच्चय A और B में समान अवयव हैं। अत: इसे सम समुच्चय कहते हैं।

11. यदि $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \theta$ हो, तो θ का मान होगा–

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

उत्तर–(a) $\frac{\pi}{3}$.

12. $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ सूत्र है–

(a) cos A (b) cos B (c) cos C (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर–(c) cos C.

13. इकाई सदिश किसे कहते हैं ?

उत्तर—जिस सदिश का मापांक इकाई होता है, उसे इकाई सदिश कहते हैं। इसे $\hat{a}$ से दर्शाते हैं। अत: $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

14. बिन्दुओं (0, 0, 0) और (– 1, 1, 1) के बीच की दूरी होगी—

(a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) 2

उत्तर—(b) $\sqrt{3}$.

15. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ का मान होगा—

(a) 0 (b) – 4 (c) 4 (d) ∞

उत्तर—(c) 4.

16. $\dfrac{d}{dx} \cos ax$ का मान होगा—

(a) $-a \sin ax$ (b) $a \sin ax$ (c) $\dfrac{\sin x}{a}$ (d) $-\dfrac{\sin ax}{a}$.

उत्तर—(a) $-a \sin ax$.

17. प्रथम सात विषम प्राकृतिक संख्याओं की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

उत्तर—प्रथम सात विषम प्राकृतिक संख्या = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

पदों की संख्या N = 7

माध्यिका = $\left(\dfrac{N+1}{2}\right)$ वें पद का मान

= $\left(\dfrac{7+1}{2}\right)$ वें पद का मान = $\left(\dfrac{8}{2}\right)$ वें पद का मान

= 4वाँ पद का मान

= 7 **उत्तर**

18. एक सिक्के को उछालने पर शीर्ष आने की प्रायिकता होगी—

(a) 2 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर—(b) $\dfrac{1}{2}$

19. $\int e^{5x} dx$ का मान होगा—

(a) $5e^{5x} + C$ (b) $\dfrac{e^{5x}}{5} + C$ (c) $C + e^{5x}$ (d) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर—(b) $\dfrac{e^{5x}}{5} + C$.

20. $\int \tan x \, dx$ को सरल कीजिए।

हल :
$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} = -\log(\cos x) + c$$
[∵ sin *x* का फलन cos *x* का अवकलन है]
$$= \log \cos^{-1} x + c$$
$$= \log \frac{1}{\cos x} + c$$
$$\int \tan x \, dx = \log \sec x + c$$
उत्तर

22. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ सूत्र है—

(a) $\sin^{-1} x$ (b) $\cos^{-1} x$ (c) $\operatorname{cosec}^{-1} x$ (d) $\tan^{-1} x$

उत्तर—(a) $\sin^{-1} x$.

22. $\int x^3 dx$ का मान होगा—

(a) $3x^2 + c$ (b) $\frac{x^4}{4} + c$ (c) $3x^4$ (d) कोई नहीं।

उत्तर—(b) $\frac{x^4}{4} + c$

प्रश्न 23. 3 + 4*i* का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{4-1+2.2i}$$
$$= \sqrt{(2)^2-(1)^2+2.2i} = \sqrt{(2+i)^2}$$
$$= \pm(2+i)$$
उत्तर

अथवा

प्रश्न—सरल कीजिए—

$${}^nP_6 = 30\ {}^nP_4$$

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 24 का हल।

प्रश्न 24. 3 + 33 + 333 + ... + *n* पद का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि *n* पदों का योगफल S_n है।
$$S_n = 3[1 + 11 + 111 + ... + n \text{ पदों तक}]$$
$$= \frac{3}{9}[9 + 99 + 999 + ... + n \text{ पदों तक}]$$

$= \frac{3}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+....+ n \text{ पदों तक}]$

$= \frac{3}{9}[\{10+10^2+10^3+....+ n \text{ पदों तक}]$
$+ [-1-1-1-1 .... - n \text{ पदों तक}\}$

$= \frac{3}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right] = \frac{30}{81}(10^n-1)-\frac{3n}{9}$

$= \frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{n}{3}$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—किसी समान्तर श्रेढी का 5वाँ पद 11 और 9वाँ पद 17 है, प्रथम 20 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि श्रेढी का प्रथम पद a और सार्वन्तर d है।

तब श्रेढी का 5वाँ पद $= a+(5-1)d = a+4d$

9वाँ पद $= a+(9-1)d = a+8d$

$\therefore$ प्रश्नानुसार, $a+4d = 11$ ...(1)

और $a+8d = 17$ ...(2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर,

$4d = 6$

$d = \frac{3}{2}$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$a+4\times\frac{3}{2} = 11$

$\Rightarrow a+6 = 11$

$\Rightarrow a = 11-6 = 5$

अत: श्रेढी के 20 पदों का योग $= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{20}{2}\left[2\times5+(20-1)\times\frac{3}{2}\right] = 10\left(10+\frac{57}{2}\right)$

$= 385$ **उत्तर**

प्रश्न 25. यदि $f(x) = 2x - 1$ तथा $g(x) = x^2 + 3$ हो, तो (fog) का मान एवं (gof) का मान ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र देखें सेट-3 वर्ष 2011 (दिसम्बर) का प्रश्न क्रमांक 25 का हल।

अथवा

प्रश्न—सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta.$$

हल : L.H.S. $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$= \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$

= R.H.S. **सिद्ध हुआ।**

प्रश्न 26. सिद्ध कीजिए कि—

$$\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1}\frac{1}{3}.$$

हल : L.H.S. $= \tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(1)$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2-1}{1+2\times 1}\right]$$

$$\left[\because \tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ = R.H.S. **सिद्ध हुआ।**

अथवा

प्रश्न—यदि $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$ तथा $\angle B = 60^\circ$ हो, तो कोण A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 26 (अथवा) देखें।

प्रश्न 27. बिन्दु (*a*, *b*) और (5, 7) के बीच की दूरी को बिन्दु (4, 6), 2 : 1 में विभाजित करता है, *a* और *b* का मान ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 का (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 27 का हल।

अथवा

यदि रेखाएँ $7x - 5y = 12$ और $5x + Py = 4$ एक-दूसरे के लम्बवत् हों तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र देखें सेट-1 वर्ष 2012 (दिसम्बर) का पृष्ठ क्रमांक 35 का हल।

प्रश्न 28. मान ज्ञात कीजिए—

$$\lim_{x\to5}\frac{x^4-625}{x^3-125}$$

हल : $\lim_{x\to5}\frac{x^4-625}{x^3-125} = \lim_{x\to5}\frac{x^4-5^4}{x^3-5^3}$

$$= \lim_{x\to5}\frac{\frac{x^4-5^4}{x-5}}{\frac{x^3-5^3}{x-5}}$$

$$= \frac{4\cdot5^{4-1}}{3\cdot5^{3-1}} \qquad \left[\because \lim_{x\to5}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}, a>0\right]$$

$$= \frac{4\cdot5^3}{3\cdot5^2} = \frac{4\cdot5}{3}$$

$$= \frac{20}{3}$$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—यदि $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+....\infty}}}$ **हो, तो "द्ध करो कि—**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}.$$

हल : दिया है—$y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+....\infty}}}$

माना $y = \sqrt{\sin x + y}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $y^2 = \sin x + y$

$\Rightarrow$ $2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow$ $2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \cos x$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}(2y-1) = \cos x$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$ **"द्ध हुआ।**

प्रश्न 29. सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ एवं $4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 28 (अथवा) का हल।

अथवा

समतलों $2x+3y+2\sqrt{32}+1=0$ तथा $x+y+\sqrt{2}z=0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये समतलों के समीकरण हैं–

$$2x+3y+2\sqrt{3}z+1 = 0 \quad ...(1)$$

तथा
$$x+y+\sqrt{2}z = 0 \quad ...(2)$$

यहाँ $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 2\sqrt{3}$ तथा $a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = \sqrt{2}$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$= \frac{2\times1+3\times1+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2^2+3^2+(2\sqrt{3})^2}\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}} = \frac{2+3+2\sqrt{6}}{\sqrt{4+9+12}\sqrt{1+1+2}}$$

$$\cos\theta = \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{25}\sqrt{4}} = \frac{5+2\sqrt{6}}{5\times2} = \frac{5+2\sqrt{6}}{10}$$

अतः $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{10}\right)$$ **उत्तर**

प्रश्न 30. दिए गए सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए–

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	5	12	20	9	4

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 30 (अथवा) का हल।

अथवा

निम्न सारणी से माध्यिका की गणना कीजिए–

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृत्ति	5	8	15	16	6

हल :

क्र.	वर्ग अन्तराल	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
1	0–10	5	5
2	10–20	8	13
3	20–30	15	28
4	30–40	16	44
5	40–50	6	50

यहाँ N = 50

$$\therefore \quad \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

चूँकि 25 का मान संचयी आवृत्ति 20 के अन्तर्गत आता है अत: 20 – 30 में आता है। अत: 20–30 माध्यिका वर्ग है।

$$M_d = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f}(N/2 - c)$$

$$= 20 + \frac{30-20}{15}(25-13)$$

$$= 20 + \frac{10}{15} \times 12$$

$$= 20 + 8$$

माध्यिका = 28

उत्तर

प्रश्न 31. यादृच्छिक चुने गए लीप वर्ष में 53 रविवार होने का संयोग क्या है ?

हल : लीप वर्ष में दिनों की संख्या = 366

अब 365 दिन = 52 सप्ताह

और 2 दिन अत: लीप वर्ष में 52 रविवार हैं। अगले 2 दिन के सम्भव संचय नीचे दिये गये हैं—

(i) रविवार तथा सोमवार, (ii) सोमवार तथा मंगलवार, (iii) मंगलवार तथा बुधवार, (iv) बुधवार तथा गुरुवार, (v) गुरुवार तथा शुक्रवार, (vi) शुक्रवार तथा शनिवार, (vii) शनिवार तथा रविवार।

यादृच्छिक चुने गये लीप वर्ष में 53 रविवार होने के लिए अगले दो दिन में एक रविवार अवश्य होना चाहिए। चूँकि उपर्युक्त सात सम्भावनाओं में इस घटना के दो अनुकूल परिणाम हैं।

अथवा

प्रश्न—ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता यदृच्छया निकाला जाता है तो गुलाम, बेगम, बादशाह निकलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र सेट-3 वर्ष 2011 (दिसम्बर) का प्रश्न क्रमांक 31 (अथवा) का हल देखें।

प्रश्न 32. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$ **के विस्तार में अचर पद ज्ञात कीजिए।**

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 24 (अथवा) का हल।

अथवा

प्रश्न—यदि $ax^2 + 10x + 5 = 0$ की एक मूल, दूसरे मूल का तीन गुना है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि दिये हुए समीकरण

$$ax^2 + 10x + 5 = 0 \quad ...(1)$$

के मूल α, β हैं। तब प्रश्नानुसार,

$$\alpha = 3\beta$$

समीकरण (1) में, $a = a,\ b = 10,\ c = 5.$

$\therefore$ $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$\Rightarrow$ $$3\beta + \beta = -\frac{10}{a}$$

$\Rightarrow$ $$4\beta = -\frac{10}{a} \qquad ...(2)$$

तथा $$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$\Rightarrow$ $$3\beta.\beta = \frac{5}{a}$$

$\Rightarrow$ $$3\beta^2 = \frac{5}{a}$$

$\Rightarrow$ $$3\left(\frac{-10}{4a}\right)^2 = \frac{5}{a} \qquad \text{[समीकरण (2) से]}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{300}{16a^2} = \frac{5}{a}$$

$\Rightarrow$ $$16a^2 \times 5 = 300 \times a$$

$\Rightarrow$ $$80a^2 - 300a = 0$$

$\Rightarrow$ $$a\,(80a - 300) = 0$$

$\Rightarrow$ $a = 0$ या $80a - 300 = 0$

$\Rightarrow$ $a = 0$ या $80a = 300$

$\Rightarrow$ $a = 0$ या $a = \frac{300}{80} = \frac{15}{4}$

स्पष्टत: $a \neq 0$ अतएव $a = \frac{15}{4}$.

उत्तर

प्रश्न 33. क्रेमर के नियम से समीकरण हल कीजिए—

$$\mathbf{3x + y + z = 2,}$$
$$\mathbf{2x - 4y + 3z = -1,}$$
$$\mathbf{9x + y - 3z = -11}$$

हल : दिया गया समीकरण—

$$3x + y + z = 2,$$

$$2x - 4y + 3z = -1,$$
$$4x + y - 3z = -11$$

यहाँ
$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 3(12 - 3) + 1\,(12 + 6) + 1(2 + 16)$$
$$= 27 + 18 + 18$$
$$= 63$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -11 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(12 - 3) + 1(-33 - 3) + 1(-1 - 44)$$
$$= 18 - 36 - 45$$
$$= -63$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -11 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 3\,(3 + 33) + 2\,(12 + 6) + (-12 + 4)$$
$$= 108 + 36 - 18$$
$$= 126$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & -11 \end{vmatrix}$$
$$= 3(44 + 1) + 1(-4 + 22) + 2(2 + 16)$$
$$= 135 + 18 + 36$$
$$= 189$$

क्रेमर नियम से,
$$\frac{x}{D_1} = \frac{y}{D_2} + \frac{z}{D_3} = \frac{1}{D}$$

$\Rightarrow$
$$\frac{x}{-63} = \frac{y}{126} = \frac{z}{189} = \frac{1}{63}$$

$\Rightarrow$
$$x = \frac{-63}{63} = -1$$

$\Rightarrow$
$$y = \frac{126}{63} = 2$$

$$\Rightarrow \qquad z = \frac{189}{63} = 3$$

अत: $x = -1, y = 2, z = 3.$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—आव्यूह विधि से समीकरण को हल कीजिए—

$\boldsymbol{x + y + z = 9, 2x + 5y + 7z = 52, 2x + y - z = 0.}$

हल : दिये गये समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 52 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\therefore \qquad X = A^{-1} B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(-5-7) - 1\,(-2-14) + 1\,(2-10)$$

$$= -12 + 16 - 8 = -4 \neq 0$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -5 - 7 = -12$$

$$A_{12} = -\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -(-2-14) = 16$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 10 = -8$$

$$A_{21} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -(-1-1) = 2$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$A_{23} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -(1-2) = 1$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 7 - 5 = 2$$

$$A_{32} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = -(7-2) = -5$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 5 - 2 = 3$$

$$\text{Adj A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1} = \frac{\text{Adj A}}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}}{-4}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$X = A^{-1} B$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12\times 9 + 2\times 52 + 2\times 0 \\ 16\times 9 + (-3)\times 52 + (-5)\times 0 \\ -8\times 9 + 1\times 52 + 3\times 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -108+104+0 \\ 144+(-156)+0 \\ -72+52+0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ -12 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x = 1, y = 3, z = 5.$ **उत्तर**

प्रश्न 34. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है और दोनों अक्षों से ऐसे अंतःखण्ड काटती है, जिनकी लम्बाइयों का योग 6 है।

हल : छात्र सेट-2 देखें वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 35 का हल।

अथवा

दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ की उत्केन्द्रता, नाभियों के निर्देशांक और अक्षों की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : छात्र देखें सेट-2 वर्ष 2012 (मई-जून) का प्रश्न क्रमांक 35 (अथवा) का हल।

प्रश्न 35. रेखाओं $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ और $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई रेखाओं का समीकरण है–

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4} \qquad ...(1)$$

तथा

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2} \qquad ...(2)$$

यहाँ $a_1 = 3, b_1 = 5, c_1 = 4$

तथा $a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 2.$

माना इन रेखाओं के बीच का कोण θ है। तब

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$= \frac{3.1 + 5.1 + 4.2}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{3 + 5 + 8}{\sqrt{9 + 25 + 16}\sqrt{1 + 1 + 4}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{16}{\sqrt{50}\times\sqrt{6}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2\times 5\times 5\times 2\times 3}} = \frac{16}{2\times 5\times\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{8}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

अत: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—गोले $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 6z - 19 = 0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का दिया गया समीकरण है—

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 6z - 19 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3z - \frac{19}{2} = 0$$

$g = -1, f = 2, h = -\frac{3}{2}, c = -\frac{19}{2}$

$$\text{केन्द्र} = (-g, -f, -h) = \left(1, -2, \frac{3}{2}\right)$$

तथा $\text{त्रिज्या} = \sqrt{g^2 + f^2 + h^2 - c}$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{2}}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + \frac{9}{4} + \frac{19}{2}} = \sqrt{\frac{67}{4}}$$

अत: $\text{त्रिज्या} = \sqrt{\frac{67}{2}}$ **उत्तर**

प्रश्न 36. यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$

$$\Rightarrow \quad y = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{\left[\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\right]}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{ð}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$ उत्तर

अथवा

प्रश्न—यदि $y = (\tan x)^{\tan x}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है— $y = (\tan x)^{\tan x}$

दोनों पक्षों में log लेने पर, $\log y = \log (\tan x)^{\tan x}$

$\Rightarrow \quad \log y = \tan x . \log (\tan x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan \frac{d}{dx} \log (\tan x) + \log \tan x \frac{d}{dx} \tan x$$

$$= \tan x \frac{1}{\tan x} \sec^2 x + \log \tan x \sec^2 x$$

$$= \sec^2 x + \sec^2 x \log \tan x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sec^2 (1 + \log \tan x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y. \sec^2 x. (1 + \log \tan x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (\tan x)^{\tan x} . \sec^2 x (1 + \log \tan x)$$ उत्तर

प्रश्न 37. मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$$

हल : माना

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(\pi/2-x)}}{\sqrt{\cos(\pi/2-x)}+\sqrt{\sin(\pi/2-x)}} dx$$

$$\left[\because \int_0^a \sqrt{(x)}\, dx = \int_0^a \sqrt{(a-x)}\, dx\right]$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$$

समी. (1) और (2) को जोड़ने पर,

$$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$$

$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$

$= \int_0^{\pi/2} 1 \, dx$

$= [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0$

$\Rightarrow \quad 2I = \pi/2$

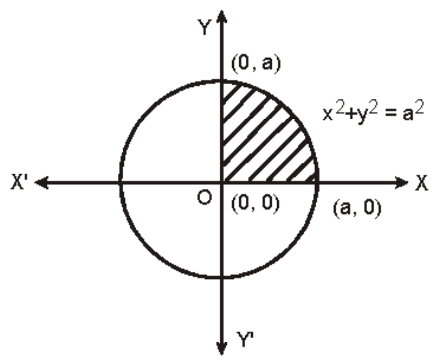
$\Rightarrow \quad I = \pi/4$ **उत्तर**

अथवा

प्रश्न—वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र $x^2 + y^2 = a^2$ एक वृत्त है जिसका केन्द्र (0, 0) तथा त्रिज्या a है। अत: हमें वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$.

x-अक्ष तथा कोटियों $x = 0$ और $x = a$ द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।



$\therefore \quad$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^a y \, dx$

$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

[$\because$ प्रथम चतुर्थांश में y धनात्मक है]

$= \left[\frac{2}{x} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^a$

$= 0 + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 1 - 0 - \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 0$

$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ [∵ $\sin^{-1} 1 - \pi/2 \sin^{-1} 0 = 0$]

$= \frac{\pi a^2}{4}$ वर्ग इकाई **उत्तर**

प्रश्न 38. सिद्ध कीजिए कि—

$\sin 20^\circ . \sin 40^\circ . \sin 60^\circ . \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.

हल : L.H.S. $= \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$

$= \sin 20^\circ \sin 40^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} (2 \sin 20^\circ \sin 40^\circ) \sin 80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} [\cos (20^\circ - 40^\circ) - \cos (20^\circ + 40^\circ)] \sin$
80°

$= \frac{\sqrt{3}}{4} [\cos (-20^\circ) - \cos 60^\circ] \sin 80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right] \sin 80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 20^\circ \sin 80^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} (2 \cos 20^\circ \sin 80^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} [\sin 100^\circ - \sin (-60^\circ)] - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} [\sin 100^\circ - \sin 60^\circ] - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} [\sin 100^\circ + \sin 80^\circ] + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 60^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} \left(2 \cos \frac{100^\circ + 80^\circ}{2} \sin \frac{100^\circ - 80^\circ}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} (2 \cos 90^o \sin 10^o) + \frac{3}{16}$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} (2 \times 0 \times \sin 10^o) + \frac{3}{16}$

$= \frac{3}{16}$

= R.H.S.

अथवा

प्रश्न—सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{\cos 6A - \cos 4A}{\sin 6A + \sin 4A} = -\tan A$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 6A - \cos 4A}{\sin 6A + \sin 4A}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{6A + 4A}{2} \sin \frac{4A - 6A}{2}}{2 \sin \frac{6A + 4A}{2} \cos \frac{6A - 4A}{2}}$$

$$= \frac{\sin 5A \sin (-A)}{\sin 5A \cos A} = \frac{\sin (-A)}{\cos A}$$

$$= \frac{-\sin A}{\cos A} = -\tan A$$

= R.H.S **सिद्ध हुआ।**

❑